目　　录

第一编
仅使用直线和圆的作图问题

第二编
曲线的性质

第三编

立体及超立体问题的作图

第　一　编

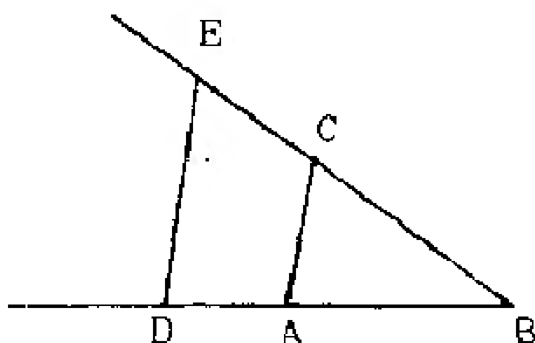
仅使用直线和圆的作图问题

任何一个几何问题都很容易化归为用一些术语来表示，使得只要知道直线段的长度的有关知识，就足以完成它的作图。

如何将算术运算转为几何的运算

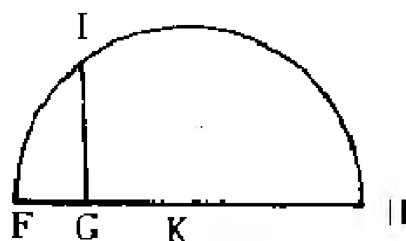
算术仅有四或五种运算组成，即加、减、乘、除和开根，后者可认为是一种除法；在几何中，为得到所要求的线段，只需对其它一些线段加加减减；不然的话，我可以取一个线段，称之为单位，目的是把它同数尽可能紧密地联系起来，而它的选择一般是任意的；当再给定其它两条线段，则可求第四条线段，使它与给定线段之一的比等于另一给定线段与单位线段的比（这跟乘法一致）；或者，可求第四条线段，使它与给定线段之一的比等于单位线段与另一线段之比（这等价于除法）；最后，可在单位线段和另一线段之间求一个，两个或多个比例中项（这相当于求给定线段的平方根、立方根，等等）。为了更加清晰明了，我将毫不犹豫地将这些算术的术语引入几何。

如何在几何中进行乘、除和开平方根



例如，令 AB 为单位线段，求 BC 乘 BD。我只要联结点 A 与点 C，引 DE 平行 CA；则 BE 即是 BD 和 BC 的乘积。

若求 BD 除 BE，我联接 E 和 D，引 AC 平行 DE；则 BC 即为除得的结果。



若想求 GH 的平方根，我沿该直线加上一段等于单位长的线段 FG；然后平分 FH 于 K；我再以 K 为心作圆 FIH，并从 G 引垂线延至 I。那么，GI 即所求的平方根。我在这里不讲立方根或其它根的求法，因为在后面讲起来更方便。

我们如何在几何中使用算术符号

通常，我们并不需要在纸上画出这些线，而只要用单个字母来标记每一条线段就够了。所以，为了作线段 BD 和 GH 的加法，我记其中的一条为 a，另一条为 b，并写下 $a+b$。同样，$a-b$ 将表示从 a 中减去 b；ab 表示 b 乘 a；$\frac{a}{b}$ 表示 b 除 a；aa 或 a^2 表示 a 自乘；a^3 表示

自乘所得的结果再乘 a，并依此类推。类似地，若求 a^2+b^2 的平方根，我记作 $\sqrt{a^2+b^2}$；若求 $a^3-b^3+ab^2$ 的立方根，我写成 $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$，依此可写出其它的根。必须注意，对于 a^2，b^3 及类似的记号，我通常用来表示单一的一条线段，只是称之为平方、立方等等而已，这样，我就可以利用代数中使用的术语了。

还应该注意，当所讨论的问题未确定单位时，每条线段的所有部分都应该用相同的维数来表示。a^3 所含的维数跟 ab^2 或 b^3 一样，我都称之为线段 $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$ 的组成部分。然而，对单位已确定的情形就另当别论了，因为不论维数的高低，对单位而言总不会出现理解上的困难；此时，若求 a^2b^2-b 的立方根，我们必须认为 a^2b^2 这个量被单位量除过一次，而 b 这个量被单位量乘过 2 次。

最后，为了确保能记住线段的名称，我们在给它们指定名称或改变名称时，总要单独列出名录。例如，我们可以写 AB＝1，即 AB 等于 1；GH＝ a ，BD＝ b 等等。

我们如何利用方程来解各种问题

于是，当要解决某一问题时，我们首先假定解已经得到，并给为了作出此解而似乎要用到的所有线段指定名称，不论它们是已知的还是未知的。然后，在不对已知和未知线段作区分的情况下，利用这些线段间最自然的关系，将难点化解，直至找到这样一种可能，即用两种方式表示同一个量。这将引出一个方程，因为这两个表达式之一的各项合在一起等于另一个的各项。

我们必须找出跟假定为未知线段的数目一样多的方程；但是，若在考虑了每一个有关因素之后仍得不到那样多的方程，那么，显

然该问题不是完全确定的。一旦出现这种情况，我们可以为每一条缺少方程与之对应的未知线段，任意确定一个长度。

当得到了若干个方程，我们必须有条不紊地利用其中的每一个，或是单独加以考虑，或是将它与其它的相比较，以便得到每一个未知线段的值；为此，我们必须先统一地进行考察，直到只留下一条未知线段，它等于某条已知线段；或者是未知线段的平方、立方，四次方、五次方、六次方等中的任一个，等于两个或多个量的和或差，这些量中的一个是已知的，另一些由单位跟这些平方、或立方、或四次方得出的比例中项乘以其它已知线段组成。我用下列式子来说明：

$$z = b$$

$$或z^2 = -az + b^2$$

$$或z^3 = az^2 + b^2z - c^3$$

$$或z^4 = az^3 - c^3z + d^4,$$

……

即，z 等于 b，这里的 z 我用以表示未知量；或 z 的平方等于 b 的平方减 z 乘 a；或 z 的立方等于：z 的平方乘以 a 后加 z 乘以 b 的平方，再减 c 的立方，其余类推。

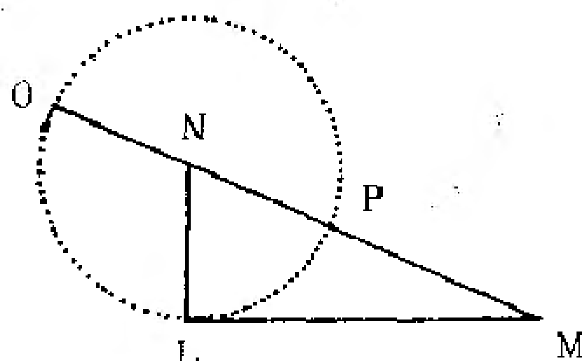
这样，所有的未知量都可用单一的量来表示，无论问题是能用圆和直线作图的、或是能用圆锥截线作图的，甚或是能用次数不高於三或四次的曲线作图的。

我在这里不作更详细的解释，否则我会剥夺你靠自己的努力去理解时所能享受的愉悦；同时，通过推演导出结论，对于训练你的思维有益，依我之见，这是从这门科学中所能获得的最主要的好处。这样做的另一个理由是，我知道对于任何熟悉普通的几何和代数的人而言，只要他们仔细地思考这篇论著中出现的问题，就不会碰到无法克服的困难。

因此，我很满意如下的说法：对于一名学生来说，如果他在解

这些方程时一有机会就能利用除法，那么他肯定能将问题约化到最简单的情形。

平面问题及其解



如果所论问题可用通常的几何来解决，即只使用平面上的直线和圆的轨迹，此时，最后的方程要能够完全解出，其中至多只能保留有一个未知量的平方，它等于某个已知量与该未知量的积，再加上或减去另一个已知量。于是，这个根或者说这条未知线段能容易地求得。例如，若我得到 $z^2 = az + b^2$，我便作一个直角三角形 NLM，其一边为 LM，它等于 b，即已知量 b^2 的平方根；另一边 LN，它等于 $\frac{1}{2}a$，即另一个已知量——跟我假定为未知线段的 z 相乘的那个量——的一半。于是，延长 MN，整个线段 OM 即所求的线段 z。它可用如下方式表示：

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}。$$

但是，若我得到 $y^2 = -ay + b^2$，其中 y 是我们想要求其值的量，此时我作同样的直角三角形 NLM，在斜边上划出 NP 等于 NL，剩下的 PM 即是所求的根 y。我们写作

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}。$$

同样地，若我得到

$$x^4=-ax^2+b^2,$$

此时 PM 即是 x^2，我将得出

$$x=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}},$$

其余情形类推。

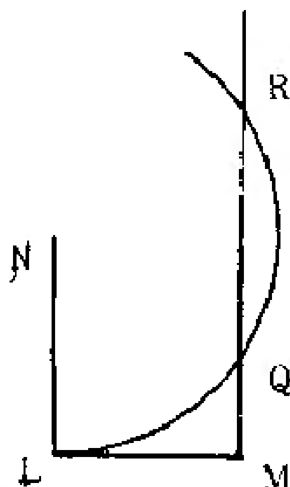
最后，若得到的是 $z^2=az-b^2$，我如前作 NL 等于 $\frac{1}{2}a$，LM 等于 b；然后，我不去联接点 M 和 N，而引 MQR 平行于 LN，并以 N 为心画过 L 的圆，交 MQR 于点 Q 和 R；那么，所求线段 z 或为 MQ，或为 MR，因为此时有两种表达方式，

即：

$$z=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$$

和

$$z=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}.$$



当以 N 为心过 L 的圆跟直线 MQR 既不相交也不相切，则方程无根，此时我们可以说这个问题所要求的作图是不可能的。

还有许多其它的方法可用来求出上述同样的根，我已给出的那些非常简单的方法说明，利用我解释过的那四种图形的作法，就可能对通常的几何中的所有问题进行作图。我相信，古代数学家没有注意到这一点，否则他们不会花费那么多的劳动去写那么多的书；正是这些书中的那些命题告诉我们，他们并没有一种求解所有问题的可靠方法，而只是把偶然碰到的命题汇集在一起罢了。

帕普斯的例子

帕普斯(Pappus)在他的第7卷书的开头所写的内容也证明了这一点。在那里，他先用相当多的篇幅列出了他的前辈撰写的大量几何著作；最后才提到一个问题，他说那即非欧几里得(Euclid)，亦非阿波罗尼奥斯(Apollonius)或其他人所能完全解决的；他是这样写的：

> 此外，他(阿波罗尼奥斯)说与三线或四线相关的轨迹问题，欧几里得并未完全解决，他本人和其他任何人也没能够完全解决。他们根本没有利用在欧几里得之前已论证过的圆锥截线，来为欧几里得所写下的内容添加任何东西。

在稍后的地方，帕普斯叙述了这个问题：

> 他(阿波罗尼奥斯)对与三线或四线相关的轨迹问题引以为豪，对其前辈作者的工作则不置一词。问题的性质如下：若给定了三条直线的位置，并且从某一点引出的三条直线段分别和三条给定直线相交成给定的角；若所引的直线段中的两条所围成的矩形与另一条的平方相比等于给定的比，则具有上述性质的点落在一条位置确定的立体轨迹上，即落在三种圆锥截线的一种上。
>
> 同样，若所引直线段与位置确定的四条直线相交成给定的角，并且所引直线段中两条所作成的矩形与另两

条作成的矩形相比等于给定的比；那么，同样地，点将落在一条位置确定的圆锥截线上。业已证明，对于只有二线的情形，对应的轨迹是一种平面轨迹。当给定的直线的数目超过四条时，至今并不知道所描绘出的是什么轨迹（即不可能用普通的方法来确定），而只能称它做‘线’。不清楚它们是什么东西，或者说不知其性质。它们中有一条轨迹已被考查过，它不是最重要的而是最容易了解的，这项工作已被证明是有益的。这里要讨论的是与它们有关的命题。

若从某一点所引的直线段与五条位置确定的直线相交成固定的角，并且所引直线段中的三条所作成的直角六面体与另两条跟一任意给定线段作成的直角六面体相比等于给定比，则点将落在一条位置确定的“线”上。同样，若有六条直线，所引直线段中的三条所作成的立体与另三条作成的立体的比为给定的比，则点也将落在某条位置确定的“线”上。但是当超过六条直线时，我们不能再说由四条直线段所作成的某物与其余直线段作成的某物是否构成一个比，因为不存在超过三维的图形。

这里，我请你顺便注意一下，迫使古代作者在几何中使用算术术语的种种考虑，未能使他们逾越鸿沟而看清这两门学科间的关系，因而在他们试图作解释时，引起了众多的含糊和令人费解的说法。

帕普斯这样写道：

对于这一点，过去解释过这些事情（一个图形的维数不能超过3）的人的意见是一致的。他们坚持认为，由这些直线段所围成的图形，无论如何都是无法理解的。然

而，一般地使用这种类型的比来描述和论证却是允许的。叙述的方式如下：若从任一点引出若干直线段，与位置确定的一些直线相交成给定的角；若存在一个由它们组合而成的确定的比，这个比是指所引直线段中的一个与一个的比，第二个与某第二个的比，第三个与某第三个的比，等等。如果有七条直线，就会出现跟一条给定直线段的比的情形，如果有八条直线，即出现最后一条与另外最后某条直线段的比；点将落在位置确定的线上。类似地，无论是奇数还是偶数的情形，正如我已说过的，它们在位置上对应四条直线；所以说，他们没有提出任何方法使得可以得出一条线。*

这个问题始于欧几里得，由阿波罗尼奥斯加以推进，但没有哪一位得以完全解决。问题是这样的：

有三条，四条或更多条位置给定的直线，首先要求找出一个点，从它可引出另外同样多条直线段，每一条与给定直线中的某条相交成给定的角，使得由所引直线段中的两条作成的矩形，与第三条直线段（若仅有三条的话）形成给定的比；或与另两条直线段（若有四条的话）所作成的矩形形成给定的比；或者，由三条直线段所作成的平行六面体与另两条跟任一给定直线段（若有五条的话）所作成的平行六面体形成给定的比，或与另三条直线段（若有六条的话）所作成的平行六面体；或者（若有七条的话）其中四条相乘所得的积与另三条的积形成给定的比，或（若有八条的话）其中四条的积与另外四条的积形成给定的比。于是，问题可以推广到有任意多条直线的情形。

因为总有无穷多个不同的点满足这些要求，所以需要发现和

* 笛卡儿所引帕普斯的这段话含义不清。我们只能从上下文来理解它。——译者

描绘出含有所有这些点的曲线。帕普斯说，当仅给定三或四条直线时，该曲线是三种圆锥截线中的一种；但是当问题涉及更多条直线时，他并未着手去确定、描述或解释所求的线的性质。他只是进而说，古代人了解它们之中的一种，他们曾说明它是有用的，似乎是最简单的，可是并不是最重要的。这一说法促使我来作一番尝试，看能否用我自己的方法达到他们曾达到过的境界。

解帕普斯问题

首先，我发现如果问题只考虑三、四或五条直线，那么为了找出所求的点，利用初等几何就够了，即只需要使用直尺和圆规，并应用我已解释过的那些原理；当然五条线皆平行的情形除外。对于这个例外，以及对于给定了六、七、八或九条直线的情形，总可以利用有关立体轨迹的几何来找出所求的点，这是指利用三种圆锥截线中的某一种；同样，此时也有例外，即九条直线皆平行的情形。对此例外及给定十、十一、十二或十三条直线的情形，依靠次数仅比圆锥截线高的曲线便可找出所求的点。当然，十三条线皆平行的情形必须除外，对于它以及十四、十五、十六和十七条直线的情形，必须利用次数比刚提到的曲线高一次的曲线；余者可依此无限类推。

其次，我发现当给定的直线只有三条或四条时，所求的点不仅会出现全体都落在一条圆锥截线上的情形，而且有时会落在一个圆的圆周上，甚或落在一条直线上。

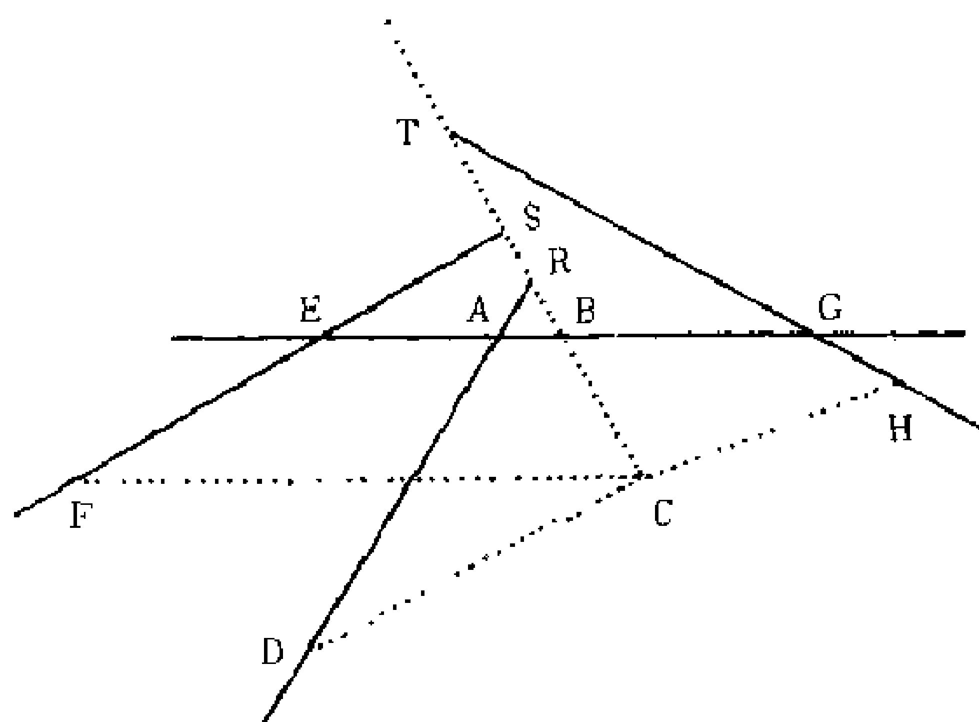
当有五、六、七或八条直线时，所求的点落在次数仅比圆锥截线高一次的曲线上，我们能够想象这种满足问题条件的曲线；当然，所求的点也可能落在一条圆锥截线上、一个圆上或一条直线上。如果有九、十、十一或十二条直线，所求曲线又比前述曲线高一

次，正是这种曲线可能符合要求。余者可依此无限类推。

最后，紧接在圆锥截线之后的最简单的曲线是由双曲线和直线以下面将描述的方式相交而生成的。

我相信，通过上述办法，我已完全实现了帕普斯告诉我们的、古代人所追求的目标。我将试图用几句话加以论证，耗费过多的笔墨已使我厌烦了。

令 AB，AD，EF，GH，……是任意多条位置确定的直线，求点 C，使得由它引出的直线段 CB，CD，CF，CH，……与给定直线分别成给定的角 CBA，CDA，CFE，CHG……，并且，它们中的某几条的乘积等于其余几条的乘积，或至少使这两个乘积形成一给定的比，这后一个条件并不增加问题的难度。



我们应如何选择适当的项以得出该问题的方程

首先，我假设事情已经做完；但因直线太多会引起混乱，我可以先把事情简化，即考虑给定直线中的一条和所引直线段中的一条（例如AB和BC）作为主线，对其余各线我将参考它们去做。称直线AB在A和B之间的线段为x，称BC为y。倘若给定的直线都不跟主线平行，则将它们延长以与两条主线（如需要也应延长）相交。于是，从图上可见，给定的直线跟AB交于点A、E、G，跟BC交于点R、S、T。

因三角形ARB的所有角都是已知的，故边AB和BR的比也可知。若我们令AB∶BR＝$z:b$，因AB＝x，我们有RB＝$\frac{bx}{z}$；又因B位于C和R之间，我们有CR＝$y+\frac{bx}{z}$。（当R位于C和B之间时，CR等于$y-\frac{bx}{z}$；当C位于B和R之间时，CR等于$-y+\frac{bx}{z}$）。又，三角形DRC的三个角是已知的，因此可以确定边CR和CD的比，记这个比为$z:c$，因CR＝$y+\frac{bx}{z}$，我们有CD＝$\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{z^2}$。那么，由于直线AB，AD和EF的位置是确定的，故从A到E的距离已知。若我们称这段距离为k，那么EB＝$k+x$；虽然当B位于E和A之间时EB＝$k-x$，而当E位于A和B之间时EB＝$-k+x$。现在，三角形ESB的各角已知，BE和BS的比也可知，我们称这个比为$z:d$。于是BS＝$\frac{dk+dx}{z}$，CS＝$\frac{zy+dk+dx}{z}$。当S位于

B和C之间时，我们有$CS=\frac{zy-dk-dx}{z}$，而当C位于B和S之间时，我们有$CS=\frac{-zy+dk+dx}{z}$。三角形FSC的各角已知，因此，CS对CF的比也可知，记作$z:e$。于是，$CF=\frac{ezy+dek+dex}{z^2}$。同样地，AG或$l$为已知，$BG=l-x$。在三角形BGT中，BG对BT的比，或者说$z:f$为已知。因此，$BT=\frac{fl-fx}{z}$，$CT=\frac{zy+fl-fx}{z}$。在三角形TCH中，TC对CH的比、或者说$z:g$也可知，故$CH=\frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$。

于是，你们看到，无论给定多少条位置确定的直线，过点C与这些直线相交成给定角的任何直线段的长度，总可以用三个项来表示。其一由某个已知量乘或除未知量y所组成；另一项由另外某个已知量乘或除未知量x所组成；第三项由已知量组成。我们必须注意例外，即，给定的直线跟AB平行（此时含x的项消失），或跟

CB 平行(此时含 y 的项消失)的情形。这种例外情形十分简单，无须进一步解释。在每一种可以想象到的组合中，这些项的符号或是 + 或是 -。

你还能看出，在由那些线段中的几条作出的乘积中，任一含 x 或 y 的项的次数不会比被求积的线段(由 x 和 y 表示)的数目大。所以，若两条线段相乘，没有一项的次数会高於 2；若有三条线段，其次数不会高于 3，依此类推，无一例外。

当给定的直线不超过五条时，我们如何知道相应的问题是平面问题

进而，为确定点 C，只需一个条件，即某些线段的积与其它某些线段的积，或者相等或者(也是相当简单的)它们的比为一给定的值。由于这个条件可以用含有两个未知量的一个方程表示，所以我们可以随意给 x 或 y 指定一个值，再由这个方程求出另一个的值。显然，当给定的直线不多于五条时，量 x　　它不用来表示这些直线中的第一条　　的次数绝不会高于 2。

给 y 指定一个值，我们得 $x^2 = \pm ax \pm b^2$，因此 x 可以借助直尺和圆规，按照已经解释过的方法作出。那么，当我们接连取无穷多个不同的线段 y 的值，我们将得到无穷多个线段 x 的值，因此就有了无穷多个不同的点 C，所求曲线便可依此画出。

这个方法也适用于涉及六条或更多直线的问题，如果其中某些直线跟 AB 或 BC 中的任一条平行的话；此时，或者 x、或者 y 的次数在方程中只是 2，所以点 C 可用直尺和圆规作出。

另一方面，若给定的直线都平行，即使问题仅涉及五条直线，

点C也不可能用这种办法求得。因为，由于量x根本不在方程中出现，所以不再允许给y指定已知的值，而必须去求出y的值。又因为此时y的项是三次的，其值只需求解一个三次方程的根便可得到，三次方程的根一般不用某种圆锥截线是不能求得的。

进而，若给定的直线不超过九条，它们不是彼此平行的，那么方程总能写成次数不高于4的形式。这样的方程也总能够利用圆锥截线，并按照我将要解释的方法去求解。

若直线的数目不超过13，则可利用次数不超过6的方程，它的求解可依靠只比圆锥截线的次数高一次的曲线，并按照将要解释的方法去做。

至此，我已完成了必须论证的第一部分内容，但在进入第二部分之前，还必须一般性地阐述一下曲线的性质。

第　二　编

曲线的性质

哪些曲线可被纳入几何学

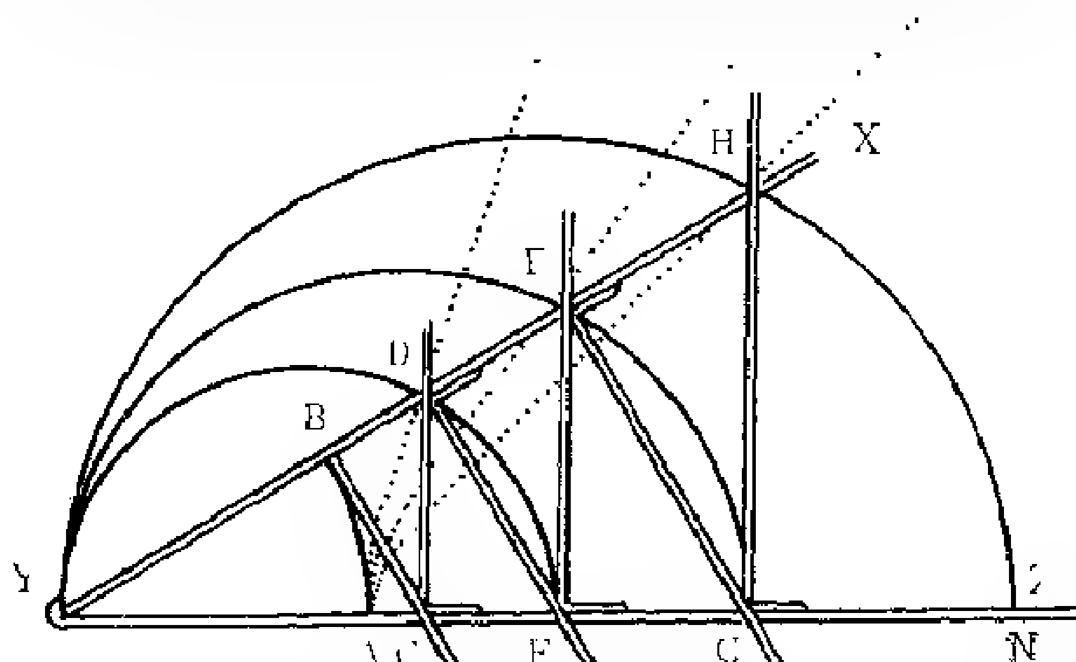
古代人熟悉以下事实，几何问题可分成三类，即平面的、立体的和线的问题。这相当于说，某些问题的作图只需要用到圆和直线，另一些需要圆锥截线，再有一些需要更复杂的曲线。然而，令我感到吃惊的是他们没有再继续向前，没有按不同的次数去区分那些更复杂的曲线；我也实在不能理解他们为什么把最后一类曲线称作机械的而不称作几何的。如果我们说，他们是因为必须用某种工具才能描绘出这种曲线而称其为机械的，那么为了协调一致，我们也必须拒绝圆和直线了，因为它们非用圆规和直尺才能在纸上画出来，而圆规、直尺也可以称作是工具。我们也不能说因为其它工具比直尺和圆规复杂故而不精密；若这样认为，它们就该被排除出机械学领域，作图的精密性在那里甚至比在几何中更重要。在几何中，我们只追求推理的准确性，讨论这种曲线就象讨论更简单的曲线一样，都肯定是绝对严格的。我也不能相信是因为他们不愿意超越那两个公设，即：(1)两点间可作一直线，(2)绕给定的中心可作一圆过一给定的点。他们在讨论圆锥截线时，就毫不犹豫地引进了这样的假设：任一给定的圆锥可用给定的平面去截。现在，为了讨论本书引进的所有曲线，我想只须引入一条必要的假设，即两条或两条以上的线可以一条随一条地移动，并由它们的交点确定出

其它曲线。这在我看来决不会更困难。

真的，圆锥截线被接纳进古代的几何，恐怕绝非易事，我也不关心去改变由习惯所认定的事物的名称；无论如何，我非常清楚地知道，若我们一般地假定几何是精密和准确的，那么机械学则不然；若我们视几何为科学，它提供关于所有物体的一般的度量知识；那么，我们没有权力只保留简单的曲线而排除复杂的曲线，倘若它们能被想象成由一个或几个连续的运动所描绘，后者中的每一个运动完全由其前面的运动所决定——通过这种途径，总可以得到涉及每一个运动的量的精确知识。

也许，古代几何学拒绝接受比圆锥截线更复杂的曲线的真正理由在于，首先引起他们注意的第一批这类曲线碰巧是螺线、割圆曲线以及类似的曲线，它们确实只归属于机械学，而不属于我在这里考虑的曲线之列，因为它们必须被想象成由两种互相独立的运动所描绘，而且这两种运动的关系无法精确地确定。尽管他们后来考查过蚌线、蔓叶线和其它几种应该能被接受的曲线；但由于对它们的性质知之不多，他们并没有比之其它曲线给予更多的思考。另一方面，他们可能对圆锥截线所知不多，也不了解直尺和圆规的许多可能的作图，因此还不敢去做更困难的事情。我希望从今以后，凡能巧妙地使用这里提到的几何方法的人，不会在应用它们解决平面或立体问题时遇到大的困难。因此，我认为提出这一内容更加广泛的研究方向是适宜的，它将为实践活动提供充分的机会。

考虑直线 AB，AD，AF 等等，我们假设它们可由工具 YZ 所描绘。该工具由几把直尺按下述方式绞接在一起组合而成：沿直线 AN 放置 YZ，角 XYZ 的大小可增可减，当它的边集拢后，点 B，C，D，E，F，G，H 全跟 A 重合；而当角的尺寸增加时，跟 XY 在点 B 固定成直角的直尺 BC，将直尺 CD 向 Z 推进，CD 沿 YZ 滑动时始终



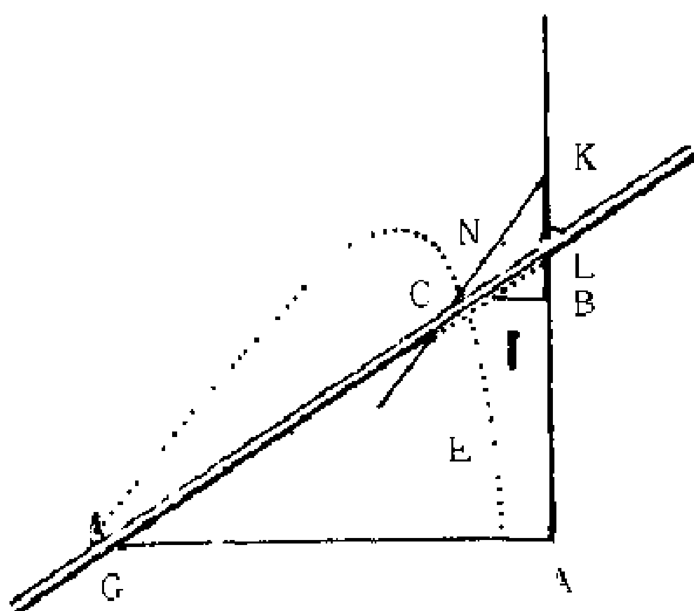
与之保持成直角。类似地，CD推动DE，后者沿XY滑动时始终与BC平行；DE推动EF；EF推动FG；FG推动GH，等等。于是，我们可以想象有无穷多把尺子，一个推动另一个，其中有一半跟XY保持相等的角度，其余的跟YZ保持等角。

当角XYZ增加时，点B描绘出曲线AB，它是圆；其它直尺的交点，即点D，F，H描绘出另外的曲线AD，AF，AH，其中后两条比第一条复杂，第一条比圆复杂。无论如何，我没有理由说明为什么不能象想象圆的描绘那样，清晰明了地想象那第一条曲线，或者，至少它能象圆锥截线一样明白无误；同样，为什么这样描绘出的第二条、第二条，以至其它任何一条曲线不能如想象第一条那样清楚呢；因此，我没有理由在解几何问题时不一视同仁地使用它们。

区分所有曲线的类别，以及掌握它们与直线上点的关系的方法

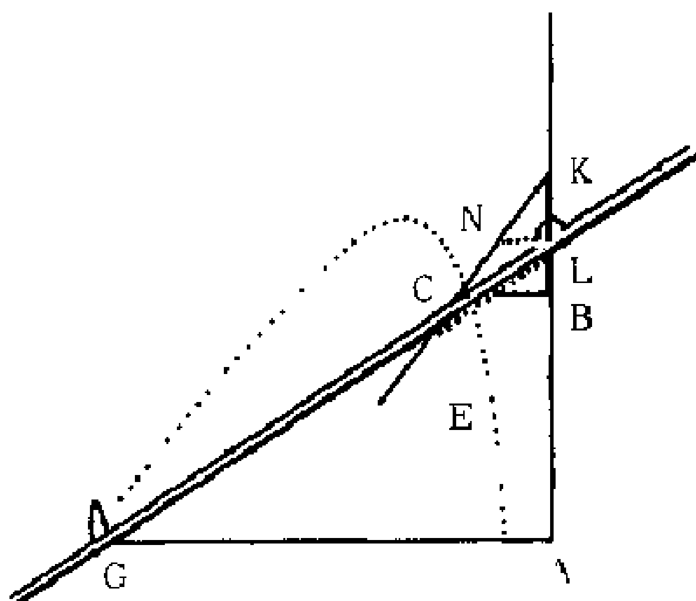
我可以在这里给出其它几种描绘和想象一系列曲线的方法，其中每一条曲线都比它前面的任一条复杂，但是我想，认清如下事实是将所有这些曲线归并在一起并依次分类的最好办法：这些曲线——我们可以称之为“几何的”，即它们可以精确地度量——上的所有的点，必定跟直线上的所有的点具有一种确定的关系，而且这种关系必须用单个的方程来表示。若这个方程不包含次数高于两个未知量所成的矩形或一个未知量的平方的项，则曲线属于第一类，即最简单的类，它只包括圆、抛物线、双曲线和椭圆；当该方程包含一项或多项两个未知量中的一个或两个的三次或四次的项，(因方程需要两个未知量来表示两点间的关系)，则曲线属于第二类；当方程包含未知量中的一个或两个的五次或六次的项，则曲线属于第三类，依此类推。

设 EC 是由直尺 GL 和平面直线图形 CNKL 的交点所描绘出的曲线；直线图形的边 KN 可朝 C 的方向任意延长，图形本身以如下方式在同一平面内移动：其边 KL 永远跟直线 BA(朝两个方向延长)的某个部分相重，并使直尺 GL 产生绕 G 的转动(该直尺与图形 CNKL 在 L 处铰接)。当我想弄清楚这条曲线属于哪一类时，我要选定一条直线，比如 AB，作为曲线上所有点的一个参照物；并在 AB 上选定一个点 A，由此出发开始研究。我在这里可以说“选定这个选定那个”，因为我们有随意选择的自由；若为了使所得到的方程尽可能地短小和简单，我们在作选择时必须小心从事，但不



论我选那条线来代替 AB，可以证明所得曲线永远属于同一类，而且证明并不困难。

然后，我在曲线上任取一点，比如 C，我们假设用以描绘曲线的工具经过这个点。我过 C 画直线 CB 平行于 GA。因 CB 和 BA 是未知的和不确定的量，我称其中之一为 y，另一个为 x。为了得到



这些量之间的关系，我还必须考虑用以决定该曲线作图的一些已

知量,比如 GA,我称之为 a;KL,我称之为 b;平行于 GA 的 NL,我称之为 c。于是,我说 NL 比 LK(即 c 比 b)等于 CB(即 y)比 BK,因此 BK 等于 $\frac{b}{c}y$。故 BL 等于 $\frac{b}{c}y - b$,AL 等于 $x + \frac{b}{c}y - b$。进而,CB 比 LB(即 y 比 $\frac{b}{c}y - b$)等于 AG(或 a)比 LA(或 $x + \frac{b}{c}y - b$)。用第二项乘第三项,我们得 $\frac{ab}{c}y - ab$,它等于 $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$,后者由最后一项乘第一项而得。所以,所求方程为

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac。$$

根据这个方程,我们知曲线 EC 属于第一类,事实上它是双曲线。

若将上述描绘曲线的工具中的直线图形 CNK 用位于平面 CNKL 的双曲线或其它第一类曲线替代,则该曲线与直尺 GL 的交点描绘出的将不是双曲线 EC,而是另一种属于第二类的曲线。

于是,若 CNK 是中心在 L 的圆,我们将描绘出古人可知的第一条蚌线;若利用以 KB 为轴的抛物线,我们将描绘出我已提到过的最主要的也是最简单的曲线,它们属于帕普斯问题所求的解,即当给定五条位置确定的直线时的解。

若利用一条位于平面 CNKL 上的第二类曲线来代替上述第一类曲线,我们将描绘出一条第三类曲线;而要是利用一条第三类曲线,则将得到一条第四类曲线,依此类推,直至无穷。上述论断不难通过具体计算加以证明。

无论如何,我们可以想象已经描绘出一条曲线,它是我称之为几何曲线中的一条;用这种方法,我们总能找到足以决定曲线上所有点的一个方程。现在,我要把其方程为四次的曲线跟其方程为三次的曲线归在同一类中;把其方程为六次的跟其方程为五次的曲线归在一类,余者类推。这种分类基于以下事实:存在一种一般的法则,可将任一个四次方程化为三次的,任一六次方程化为五次方程,所以,无需对每一情形中的前者作比后者更烦复的考虑。

然而，应该注意到，对任何一类曲线，虽然它们中有许多具有同等的复杂性，故可用来确定同样的点，解决同样的问题，可是也存在某些更简单的曲线，它们的使用范围也更有限。在第一类曲线中，除了具有同等复杂性的椭圆、双曲线和抛物线，还有圆——它显然是较为简单的曲线；在第二类曲线中，我们有普通的蚌线，它是由圆和另外一些曲线描绘的，它尽管比第二类中的许多曲线简单，但并不能归入第一类。

对上篇提到的帕波斯问题的解释

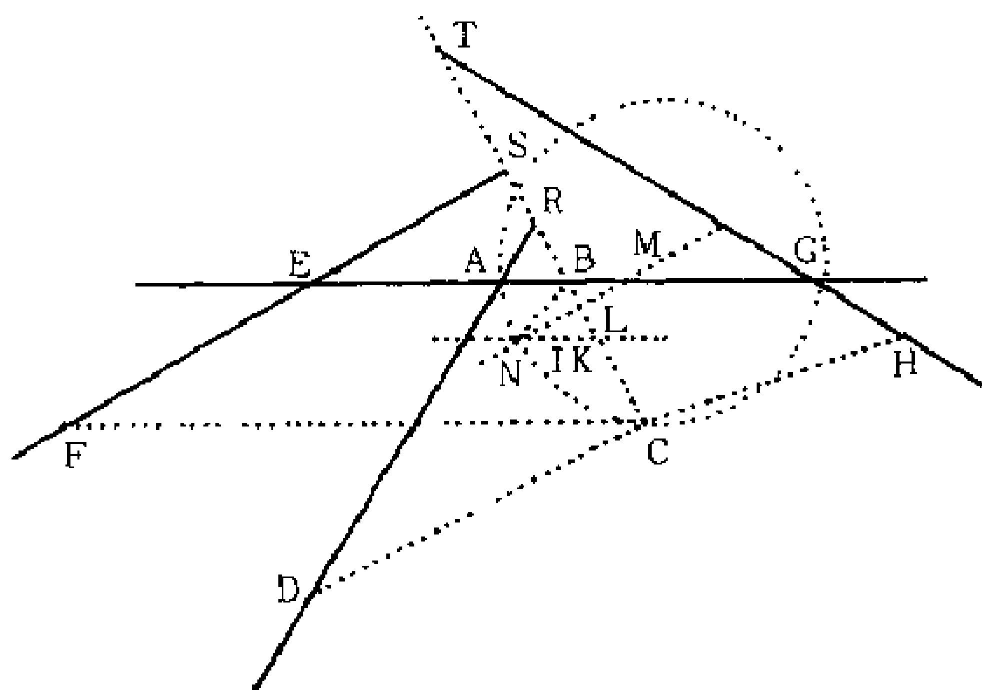
在对一般的曲线分类之后，我很容易来论证我所给出的帕普斯问题的解。因为，首先我已证明当仅有三条或四条直线时，用于确定所求点的方程是二次的。由此可知，包含这些点的曲线必属于第一类，其理由是这样的方程表示第一类曲线上的所有点和一条固定直线上的所有点之间的关系。当给定直线不超过八条时，方程至多是四次的，因此所得曲线属于第二类或第一类。当给定直线不超过十二条时，方程是六次或更低次的，因此所求曲线属于第三类或更低的类。其它情形可依此类推。

另一方面，就每一条给定直线而言，它可以占据任一处可能想象得到的位置，又因为一条直线位置的改变会相应地改变那些已知量的值及方程中的符号＋与－，所以很清楚，没有一条第一类曲线不是四线问题的解，没有一条第二类曲线不是八线问题的解，没有一条第三类曲线不是十二线问题的解，等等。由此可知，凡能得到其方程的所有几何曲线，无一不能作为跟若干条直线相联系的问题的解。

仅有三线或四线时该问题的解

现在需要针对只有三条或四条给定直线的情形作更具体的讨论，对每个特殊问题给出用于寻找所求曲线的方法。这一研究将表明，第一类曲线仅包含圆和三种圆锥截线。

再次考虑如前给定的四条直线 AB、AD、EF 和 GH，求点 C 描出的轨迹，使得当过点 C 的四条线段 CB、CD、CF 和 CH 与给定直线成给定角时，CB 和 CF 的积等于 CD 和 CH 的积，这相当于说：若



$$CB = y,$$

$$CD = \frac{czy + bcx}{z^2},$$

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2},$$

及 $$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}。$$

于是，方程为

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

此处假定 ez 大于 cg；否则所有的符号 + 和 − 都必须掉换。在这个方程中，若 y 为零或比虚无还小*，并假定点 C 落在角 DAG 的内部，那么为导出这一结论，必须假定 C 落在角 DAE、EAR 或 RAG 中的某一个之内，且要将符号改变。若对这四种位置中的每一个，y 都等于零，则问题在所指明的情形下无解。

让我们假定解可以得到；为了简化推导，让我们以 $2m$ 代替 $\frac{cflgz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}$，以 $\frac{2n}{z}$ 代替 $\frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$。于是，我们有

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2},$$

其根为

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}。$$

还是为了简洁，记 $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2}$ 为 o，$\frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}$ 等于 $\frac{p}{m}$；对于这些已给定的量，我们可随意按某一种记号来表示它们。于是，我们有

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}。$$

这就给出了线段 BC 的长度，剩下 AB 或 x 是尚未确定的。因为现在的问题仅涉及三条或四条直线，显然，我们总可得到这样的

* 笛卡儿在此处的用词是"moindre que rien"，意为"比虚无还小"，即现代术语"负的"意思。——译者

此项，尽管其中某些可能变成零，或者符号可能完全变了。

接着，我作KI平行且等于BA，在BC上截取一段BK等于m（因BC的表示式含$+m$；若它是$-m$，我将在AB的另一边作IK；而当m是零时，我就根本不去画出IK）。我再作IL，使得IK：KL＝$z:n$；即，使得当IK等于x时，KL等于$\frac{n}{z}x$。用同样的方法，我可以知道KL对IL的比，称为$n:a$，所以，若KL等于$\frac{n}{z}x$，则IL等于$\frac{a}{z}x$。因为该方程含有$-\frac{n}{z}x$，我可在L和C之间取点K；若方程所含为$+\frac{n}{z}x$，我就应该在K和C之间取L；而当$\frac{n}{z}x$等于零时，我就不画IL了。

做完上述工作，我就得到表达式

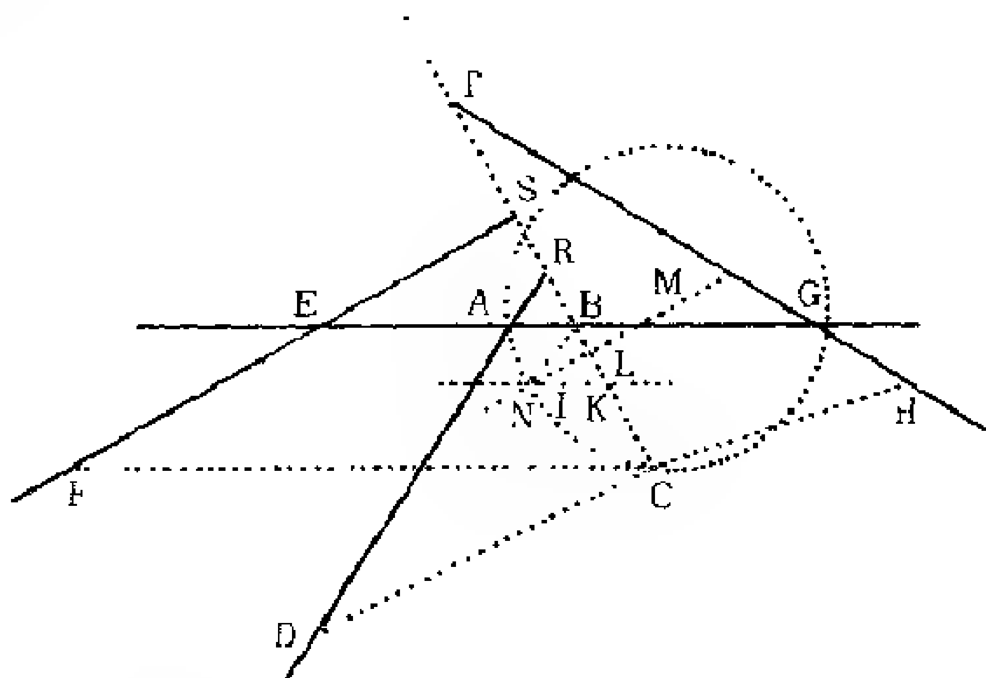
$$LC=\sqrt{m^2+ox+\frac{p}{m}x^2},$$

据此可画出LC。很清楚，若此式为零，点C将落在直线IL上；若它

是个完全平方，即当 m^2 和 $\frac{p}{m}x^2$ 两者皆为一而 o^2 等于 $4pm$，或者 m^2 和 ox（或 ox 和 $\frac{p}{m}x^2$）皆为零，则点 C 落在另一直线上，该直线的位置象 IL 一样容易确定。

若无这些例外情形发生，点 C 总是或者落在三种圆锥截线的一种之上，或是落在某个圆上，该圆的直径在直线 IL 上，并有直线段 LC 齐整地附在这条直径上*，另一方面，直线段 LC 与一条直径平行，而 IL 齐整地附在它上面。

特别地，若 $\frac{p}{m}x^2$ 这项为零，圆锥截线应是抛物线；若它前面是加号，则得双曲线；最后，若它前面是减号，则得一个椭圆。当 a^2m 等于 pz^2 而角 ILC 是直角时出现例外情形，此时我们得到一个圆而非椭圆。



* 原文称 LC"appliquee par order a ce diametre"，英译本注说这表示 LC 是"A ordinate，"意即纵标。　　译者

当圆锥截线是抛物线时，其正焦弦*等于 $\frac{oz}{a}$，其直径总是落在直线 IL 上。为了找出它的顶点 N，作 IN 等于 $\frac{am^2}{oz}$，使得 m 为正并且 ox 亦为正时，点 I 落在 L 和 N 之间；而当 m 为正并且 ox 为负时，L 落在 I 和 N 之间；而当 m^2 为负并且 ox 为正时，N 落在 I 和 L 之间。可是，当各个项象上面那样安排时，m^2 不可能为负。最后，若 m^2 等于零，点 N 和 I 必定相重。所以，根据阿波罗奥斯著作的第一篇中的第一个问题，很容易确定这是抛物线。

然而，当所求轨迹是圆、椭圆或双曲线时，必须首先找出图形的中心，点 M。它总是落在直线 IL 上，可以取 IM 等于 $\frac{aom}{2pz}$ 而求得。若 o 等于零，则 M 和 I 相重。当所求轨迹是圆或椭圆时，若 ox 项为正，则 M 和 L 必落在 I 的同侧，而若 ox 为负，则它们必落在异侧。另一方面，对于双曲线的情形，若 ox 为负，则 M 和 L 落在 I 的同侧，若 ox 为正，则它们落在异侧。

当 m^2 为正、轨迹是圆或椭圆，或若 m^2 为负而轨迹是双曲线时，图形的正焦弦必定为

$$\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}+\frac{4mpz^2}{a^2}}。$$

而当所求轨迹是圆或椭圆、m^2 为负时，或者轨迹是双曲线、o^2 大于 $4mp$、且 m^2 为正时，它必定为

$$\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}-\frac{4mpz^2}{a^2}}。$$

但是，若 m^2 等于零，则正焦弦为 $\frac{oz}{a}$；又若 oz 等于零，则它为

$$\sqrt{\frac{4mpz^2}{a^2}}。$$

---

* 笛卡儿所用的词是 coste droit，英译本译作 latus rectum。　　译者

为得到相应的直径，必须找出跟正焦弦之比为$\frac{a^2m}{pz^2}$的直线；即，若正焦弦为

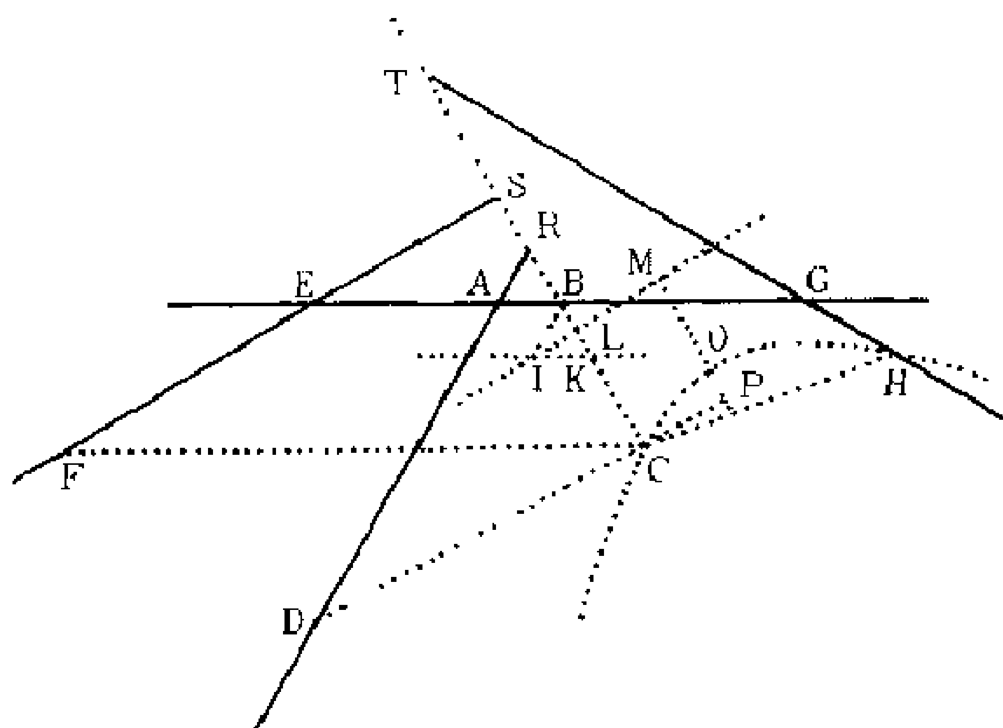
$$\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}+\frac{4mpz^2}{a^2}},$$

直径应为

$$\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2}+\frac{4a^2m^3}{pz^2}}。$$

无论哪一种情形，该圆锥截线的直径都落在 IM 上，LC 是齐整地附于其上的线段之一。可见，取 MN 等于直径的一半，并取 N 和 L 在 M 的同侧，则点 N 将是这条直径的端点。所以，根据阿波罗尼奥斯著作第一篇中的第二和第三个问题，确定这条曲线是轻而易举的事。

若轨迹是双曲线且 m^2 为正，则当 o^2 等于零或小于 $4pm$ 时，我们必须从中心 M 引平行于 LC 的直线 MOP 及平行于 LM 的 CP，并



取 MO 等于

$$\sqrt{m^2 - \frac{a^2m}{4p}};$$

而当 ox 等于零时，必须取 MO 等于 m。考虑 O 为这条双曲线的顶点，直径是 OP，齐整地附于其上的线段是 CP，其正焦弦为

$$\sqrt{\frac{4a^2m^4}{p^2z^4} - \frac{a^4o^2m^3}{p^3z^4}},$$

其直径为

$$\sqrt{4m^2 - \frac{a^2m}{p}}。$$

我们必须考虑 ox 等于零这种例外情形，此时正焦弦为 $\frac{2a^2m^2}{pz^2}$，直径为 $2m$。从这些数据出发，根据阿波罗尼奥斯著作的第一篇中的第二个问题，可以确定这条曲线。

对该解的论证

以上陈述的证明都十分简单。因为，象正焦弦、直径、直径 NL 或 OP 上的截段这些上面给出的量，使用阿波罗尼奥斯第一篇中的定理 11、12 和 13 就能作出它们的乘积，所得结果将正好包含这样一些项，它们表示直线段 CP 的平方或者说 CL，那是直径的纵标线*。

在这种情形，我们应从 NM 或者说从跟它相等的量

---

* 笛卡儿原著中未用"纵标"这个词，而使用"appliquée par ordre…"形容具有此性质的线段。英译本从此处起将此种线段意译为"纵标"，我们则译为"纵标线"。——译者

$$\frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4mp}$$

中除去 IM，即 $\frac{aom}{2pz}$。在余下的 IN 上加 IL，或者说加 $\frac{a}{z}x$，我们得

$$NL=\frac{a}{z}x-\frac{aom}{2pz}+\frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4mp}。$$

以该曲线的正焦弦 $\frac{z}{a}\sqrt{o^2+4mp}$ 乘上式，我们得一矩形的值

$$x\sqrt{o^2+4mp}-\frac{om}{2p}\sqrt{o^2+4mp}+\frac{mo^2}{2p}+2m^2，$$

并从中减去一个矩形，该矩形与 NL 的平方之比等于正焦弦与直径之比。NL 的平方为

$$\frac{a^2}{z^2}x^2-\frac{a^2om}{pz^2}x+\frac{a^2m}{pz^2}x\sqrt{o^2+4mp}$$

$$+\frac{a^2o^2m^2}{2p^2z^2}+\frac{a^2m^3}{pz^2}-\frac{a^2om^2}{2p^2z^2}\sqrt{o^2+4mp}。$$

因为这些项表示直径与正焦弦之比，我们可用 a^2m 除上式，并以 pz^2 乘所得的商，结果为

$$\frac{p}{m}x^2-ox+x\sqrt{o^2+4mp}+\frac{o^2m}{2p}-\frac{om}{2p}\sqrt{o^2+4mp}+m^2。$$

我们再从上面所得的矩形中减去此量，于是 CL 的平方等于 $m^2+ox-\frac{p}{m}x^2$。由此可得，CL 是附于直径的截段 NL 上的椭圆或圆的纵标线。

设所有给定的量都以数值表示，如 EA＝3，AG＝5，AB＝BR，BS＝$\frac{1}{2}$BE，GB＝BT，CD＝$\frac{3}{2}$CR，CF＝2CS，CH＝$\frac{2}{3}$CT，角 ABR＝60°；并令 CB・CF＝CD・CH。如果要使问题完全确定，所有这些量都必须是已知的。现令 AB＝x，CB＝y。用上面给出的方法，我们将得到

$$y^2=2y-xy+5x-x^2，$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2};$$

此时BK必须等于1，KL必须等于KI的二分之一；因为角IKL和ABR都是60°，而角KIL（它等于角KIB或IKL的一半）是30°，故角ILK是直角。因为IK $= AB = x$，KL $= \frac{1}{2}x$，IL $= x\sqrt{\frac{3}{4}}$，上面以z表示的量为1，我们得 $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$，$m = 1$，$o = 4$，$p = \frac{3}{4}$，由此可知IM $= \sqrt{\frac{16}{3}}$，NM $= \sqrt{\frac{19}{3}}$；又因a^2m（它为$\frac{3}{4}$）等于pz^2，角ILC是直角，由此导出曲线NC是圆。对其它任何一种情形的类似讨论，不会产生困难。

平面与立体轨迹，以及求解它们的方法

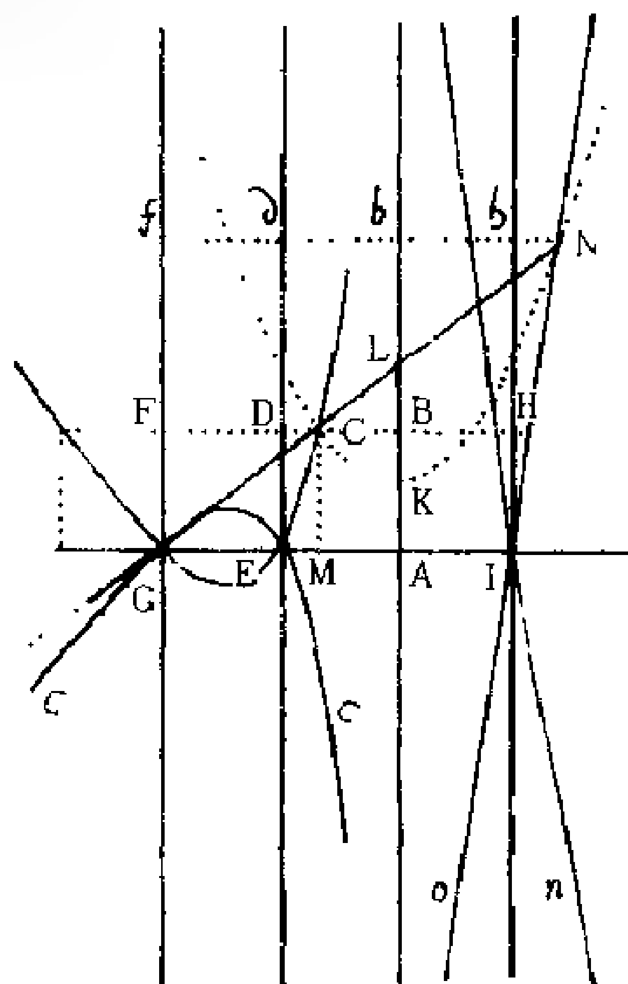
由于所有不高于二次的方程都已包括在上述讨论之中，所以，我们不仅完全解决了古代人有关三线与四线的问题，而且也完全解决了他们所谓的立体轨迹的作图问题；这自然又解决了平面轨迹的作图，因为后者包含在立体轨迹之中。解任何这类轨迹问题，无非是去找出一种状态所要求的一个完全确定的点，整条线上所有的点满足其它状态所提出的要求（正如已举的例子所表明的那样）。如果这条线是直线或圆，就说它是平面轨迹；但如果它是抛物线、双曲线或椭圆，就称它是立体轨迹。对于每一种情形，我们都能得到包含两个未知量的一个方程，它完全跟上面找出的方程类似。若所求的点位于其上的曲线比圆锥截线的次数高，我们同样可称之为超立体轨迹，余者类推。如果在确定那个点时缺少两个条件，那么点的轨迹是一张面，它可能是平面、球面或更复杂的曲面。古人的努力没有超越立体轨迹的作图；看来，阿波罗尼奥斯写他的圆锥截线论著的唯一目的是解立体轨迹问题。

我已进一步地说明了，我称作第一类曲线的只包括圆、抛物线、双曲线和椭圆。这就是我所论证的内容。

对五线情形解这一古代问题所需曲线中最基本、最简单的曲线

若古人所提出的问题涉及五条直线，而且它们全都平行，那么很显然，所求的点将永远落在一条直线上。假设所提问题涉及五条直线，而且要求满足如下条件：

(1)这些直线中的四条平行，第五条跟其余各条垂直；



(2)从所求点引出的直线与给定的直线成直角；

(3)由所引的与三条平行直线相交的三条线段作成的平行六面体必须等于另三条线段作成的平行六面体，它们是所引的与第四条平行线相交的线段、所引的与垂直直线相交的线段、以及某条给定的线段。

除了前面指出的例外情况，这就是最简单的可能情形了。所求的点将落在由抛物线以下述方式运动所描出的曲线上：

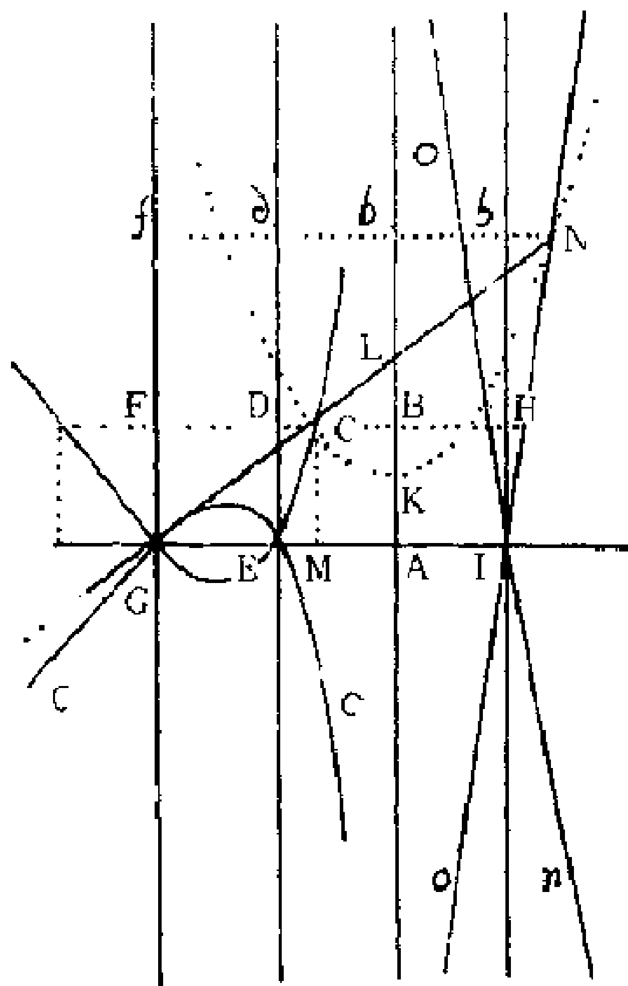
令所给直线为 AB，IH，ED，GF 和 GA。设所要找的点为 C，使得当所引的 CB，CF，CD，CH 和 CM 分别垂直于给定直线时，三条线段 CF，CD 和 CH 作成的平行六面体应等于另两条线段 CB、CM 跟第三条线段 AI 所作成的平行六面体。令 $CB=y$，$CM=x$，AI 及 AE 及 $GE=a$；因此，当 C 位于 AB 和 DE 之间时，我们有 $CF=2a-y$，$CD=a-y$，$CH=y+a$。将三者相乘，我们得到 $y^3-2ay^2-a^2y+2a^3$ 等于其余三条线段的积，即等于 axy。

接着，我将考虑曲线 CEG。我想象它是由抛物线 CKN(让它运动但使其直径 KL 总落在直线 AB 上)和直尺 GL(它绕点 G 旋转，但始终过点 L 并保持在抛物线所在的平面内*)的交点所描绘出的。我取 KL 等于 a，令主正焦弦对应于所给抛物线的轴的正焦弦也等于 a，并令 $GA=2a$，CB 或 $MA=y$，CM 或 $AB=x$。因三角形 GMC 和 CBL 相似，GM(或 $2a-y$)比 MC(或 x)等于 CB(或 y)比 BL，因此 BL 等于 $\frac{xy}{2a-y}$。因 KL 为 a，故 BK 为 $a-\frac{xy}{2a-y}$ 或 $\frac{2a^2-ay-xy}{2a-y}$。最后，因这同一个 BK 又是抛物线直径上的截段，BK 比 BC(它的纵标线)等于 BC 比 a(即正焦弦)。由此，我们得到 $y^3-2ay^2-a^2y+2a^3=axy$，故 C 即所求的点。

点 C 可以在曲线 CEG、或它的伴随曲线 cEGc 的任何部分之上

* 注意，点 L 将随抛物线的运动而变换位置。——译者

取定；后一曲线的描绘方式，除了令抛物线的顶点转到相反的方向之外，其余都和前者相同；点C也可以落在它们的配对物NIo和nIO上，NI和nIO由直线GL和抛物线KN的另一支的交点所生成。



其次，设给定的平行线AB、IH、ED和GF彼此之间的距离互不相等，且不与GA垂直，而过C的直线段与给定直线亦不成直角。在这种情形，点C将不会永远落在恰好具有同样性质的曲线上。甚至对于没有两条给定直线是平行的情形，也可能导致这种后果。

再其次，设我们有四条平行直线，第五条直线与它们相交，过点C引出的三条线段（一条引向第五条直线，两条引向平行线中

的两条)所作成的平行六面体等于另一平行六面体,后者由过C所引的分别到达另两条平行线的两条线段和另一条给定线段作成。在这种情形,所求点C将落在一条具有不同性质的曲线上,即所有到其直径的纵标线等于一条圆锥截线的纵标线,直径上在顶点与纵标线之间的线段跟某给定线段之比等于该线段跟圆锥截线的直径上具有相同纵标线的那一段的比。

我不能说,这条曲线比前述的曲线复杂;确实,我总觉得前者应首先考虑,因为它的描绘及其方程的确定多少要容易些。

我不再仔细讨论相应于其它情形的曲线,因为我一直没有对这课题进行完全的论述。由於已经解释过确定落在任一曲线上的无穷多个点的方法,我想我已提供了描绘这些曲线的方法。

经由找出其上若干点而描绘的几何曲线

值得一提的是,这种由求出曲线上若干点而描出曲线的方法,跟用来描绘螺线及其类似曲线的方法有极大差异;对于后者,并不是所求曲线上面的任何一点都能随意求得的,可求出的只是这样一些点,它们能由比作出整条曲线所需的办法更简单的方法所确定。因此,严格地说,我不可能求出曲线上的任何一个点;亦即所有要找的点中没有一个是曲线上的特殊点,它能不借助曲线本身而求得。另一方面,这些曲线上不存在这样的点,它能为无法使用我已给出的方法解决的问题提供解答。

可利用细绳描绘的曲线

但是，通过任意地取定曲线上的一些点而描出曲线的方法，只适用于有规则的和连续的运动所生成的曲线，这一事实并不能成为把它们排除出几何的正当理由。我们也不应该拒绝这样的方法，即，使用细绳或绳环以比较从所求曲线上的一些点到另外一些点间所引的两条或多条直线段是否相等，或用于跟其它直线作成固定大小的角。在“折光学”一文中，我在讨论椭圆和双曲线时已使用了这种方法。

另一方面，几何不应包括象细绳那样有时直有时弯的线；由于我们并不知道直线与曲线之间的比，而且我相信这种比是人的智力所无法发现的，因此，不可能基于这类比而得出严格和精确的结论。无论如何，因为细绳还能用于仅需确定其长度为已知的线段的作图，所以不应被完全排除。

为了解曲线的性质，必须知道其上的点与直线上点的关系；在各点引与该曲线成直角的曲线的方法

当一条曲线上的所有点和一条直线上的所有点之间的关系已知时，用我解释过的方法，我们很容易求得该曲线上的点和其它所有给定的点和线的关系，并从这些关系求出它的直径、轴、中心和

其它对该曲线有特殊重要性的线或点；然后再想出各种描绘该曲线的途径，并采用其中最容易的一种。

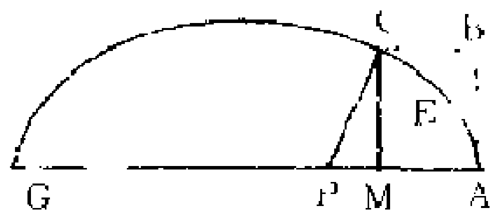
仅仅依靠这种方法，我们就可求得凡能确定的、有关它们的面积大小的量；对此，我没有必要作进一步的解释。

最后，曲线的所有其它的性质，仅依赖于所论曲线跟其他线相交而成的角。而两条相交曲线所成的角将象两条直线间的夹角一样容易度量，倘若可以引一条直线，使它与两曲线中的一条在两曲线交点处成直角的话。这就有理由使我相信，只要我给出一种一般的方法，能在曲线上任意选定的点引直线与曲线交成直角，我对曲线的研究就完全了。我敢说，这不仅是我所了解的几何中最有用的和最一般的问题，而且更是我一直祈求知道的问题。

求一直线与给定曲线相交并成直角的一般方法

设 CE 是给定的曲线，要求过点 C 引一直线与 CE 成直角。假设问题已经解决，并设所求直线为 CP。延长 CP 至直线 GA，使 CE 上的点和 GA 上的点发生联系。然后，令 $MA = CB = y$；$CM = BA = x$。我们必须找到一个方程来表示 x 和 y 的关系。我令 $PC = s$、$PA = v$，因此 $PM = v - y$。因 PMC 是直角，我们便知斜边的平方 s^2 等于两直角边的平方和 $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$。即 $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ 或 $y = v + \sqrt{s^2 - x^2}$。依据最后两个方程，我可以从表示曲线 CE 上的

点跟直线GA上的点之间关系的方程中，消去x和y这两个量中的一个。若要消去x很容易，只要在出现x的地方用$\sqrt{s^2-v^2+2vy-y^2}$代替，x^2用此式的平方代替，x^3用它的立方代替…；而若要消去y，必须用$v+\sqrt{s^2-x^2}$代替y，y^2、y^3则用此式的平方、立方代替，…。结果将得到仅含一个未知量x或y的方程。

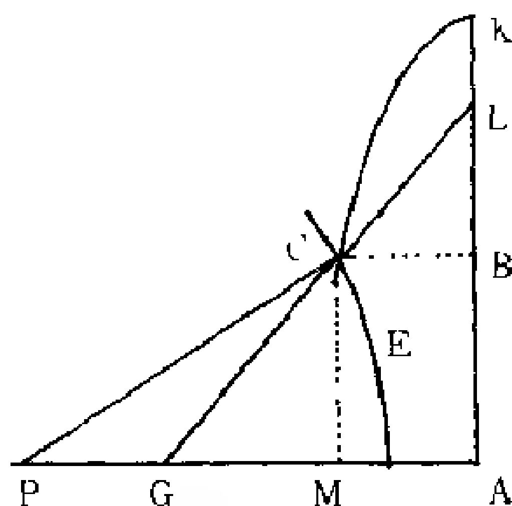


例如，若CE是个椭圆，MA是其直径上的截段，CM是其纵标线，r是它的正焦弦，q是它的贯轴，那么，据阿波罗尼奥斯的第一篇中的定理13，我们有$x^2=ry-\frac{r}{q}y^2$。消去x^2，所得方程为

$$s^2-v^2+2vy-y^2=ry-\frac{r}{q}y^2,$$

或 $$y^2+\frac{qry-2qvy+qv^2-qs^2}{q-r}=0。$$

在这一情形，最好把整个式子看成是单一的表达式，而不要看成由两个相等的部分所组成。



若CE是由已讨论过的由抛物线的运动所生成的曲线，当我们用b代表GA、c代表KL、d代表抛物线的直径KL的正焦弦时，表示x和y之间关系的方程为$y^3-by^2-cdy+bcd+dxy=0$。消去x，我们得

$$y^3-by^2-cdy+bcd+dy\sqrt{s^2-v^2+2vy-y^2}=0。$$

将该式平方，各项按y的次数排列，上式变为

$$y^6 - 2by^5 + (b^2 - 2cd + d^2)y^4 + (4bcd - 2d^2v)y^3$$
$$+ (c^2d^2 - d^2s^2 + d^2v^2 - 2b^2cd)y^2 - 2bc^2d^2y + b^2c^2d^2 = 0。$$

其它情形可类推。若所论曲线上的点不是按已解释过的方式跟一条直线上的点相联系，而是按其它某种方式相联系，那么也同样能找出一个方程。

令 CE 是按如下方式与点 F、G 和 A 相联系的曲线：从其上任一点（比如 C）引出的至 F 的直线段超出线段 FA 的量，与 GA 超出由 C 引至 G 的线段的量，形成一个给定的比。令 GA = b，AF = c；现在任取曲线上一点 C，令 CF 超出 FA 的量跟 GA 超出 GC 的量之比为 d 比 e。于是，当我们用 z 表示尚未确定的量，那么，FC = $c + z$ 且 GC = $b - \frac{e}{d}z$。令 MA = y，则 GM = $b - y$，FM = $c + y$。因 CMG 是直角三角形，从 GC 的平方中减去 GM 的平方，我们得到余下的 CM 的平方，或 $\frac{e^2}{d^2}z^2 - \frac{2be}{d}z + 2by - y^2$。其次，从 FC 的平方中减去 FM 的平方，我们得到另一种方式表示的 CM 的平方，即 $z^2 + 2cz - 2cy - y^2$。这两个表达式相等，由此导出 y 或 MA 的值，它为

$$\frac{d^2z^2 + 2cd^2z - e^2z^2 + 2bdez}{2bd^2 + 2cd^2}。$$

利用此值代替表示 CM 平方的式子中的 y，我们得

$$\mathrm{CM}^2 = \frac{bd^2z^2 + ce^2z^2 + 2bcd^2z - 2bcdez}{bd^2 + cd^2} - y^2。$$

如果我们现在设直线 PC 在点 C 与曲线交成直角，并象以前一样，令 PC = s，PA = v，则 PM 等于 $v - y$；又因 PCM 是直角三角形，我们知 CM 的平方为 $s^2 - v^2 + 2vy - y^2$。让表示 CM 平方的两个值

相等，并以 y 的值代入，我们便得所求的方程为

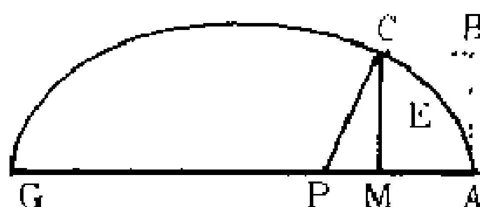
$$y^2 + \frac{2bcd^2z - 2bcdez - 2cd^2vz - 2bdevz - bd^2s^2 + bd^2v^2 - cd^2s^2 + cd^2v^2}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v} = 0。$$

已经找出的这个方程，其用处不是确定 x、y 或 z，它们是已知的，因为点 C 是取定了的；我们用它来求 v 或 s，以确定所求的点 P。为此目的，请注意当点 P 满足所要求的条件时，以 P 为心并经过点 C 的圆将与曲线 CE 相切触而不穿过它；但只要点 P 离开它应在的位置而稍微靠近或远离 A，该圆必定穿过这条曲线，其交点不仅有 C，而且还有另一个点。所以，当这个圆穿过 CE，含有作为未知量的 x 和 y 的方程（设 PA 和 PC 为已知）必有两个不等的根。例如，假设该圆在点 C 和点 E 处穿过曲线。引 EQ 平行于 CM。然后，可用 x 和 y 分别表示 EQ 和 QA，正如它们曾被用来表示 CM 和 MA 一样；因为 PE 等于 PC（同一个圆的半径），当我们寻求 EQ 和 QA（假设 PE 和 PA 是给定的）时，我们应得到跟寻求 CM 和 MA（假设 PC 和 PA 是给定的）时所得到的同样的方程。由此可知，x 的值，或 y 的值，或任何其它一个这种量的值，在这个方程中都取双值，即，方程将有两个不相等的根。若求 x 的值，这两个根中的一个将是 CM，另一个是 EQ；而求 y 的值时，一个根将是 MA，另一个是 QA。肯定，当 E 不象 C 那样跟曲线在同一侧，它们之中便只有一个是真根，另一个将画在相反的方向上，或者说它比虚无还小。然而，当点 C 和点 E 更靠近时，两根的差也就更小；当两个点重合时，两个根恰好相等，也就是说，过 C 的圆将在点 C 与曲线相切触而不穿过它。

进而可知,当方程有两个相等的根时,方程的左端在形式上必定类似于这样的式子,即当已知量等于未知量时,它取未知量与已知量的差自乘的形式;那么,若最终所得的式子的次数达不到最初那个方程的次数,就可以用另一个式子来乘它,使之达到相同的次数。这最后一步使得两个表达式得以一项一项地对应起来。

例如,我可以说,目前的讨论中找出的第一个方程,即

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q-r},$$



它必定跟如下方式得到的式子具有相同的形式:取 $e=y$,令 $(y-e)$ 自乘,即 $y^2 - 2ey + e^2$。然后,我们可以逐项比较这两个表达式:因为各式中的第一项 y^2 相同,第一式中的第二项 $\frac{qry-2qvy}{q-r}$ 等于第二式中的第二项 $-2ey$;由此可解出 v 或 PA,我们得 $v=e-\frac{r}{q}e+\frac{1}{2}r$;或者,因为我们已假定 e 等于 y,故 $v=y-\frac{r}{q}y+\frac{1}{2}r$。用同样的方法,我们可以从第三项 $e^2=\frac{qv^2-qs^2}{q-r}$ 来求 s;因为 v 完全确定了 P,这就是所要求的一切,因此无需再往下讨论。

同样,对於上面求得的第二个方程*,即

$$y^6 - 2by^5 + (b^2 - 2cd + d^2)y^4 + (4bcd - 2d^2v)y^3 + (c^2d^2 - 2b^2cd + d^2v^2 - d^2s^2)y^2 - 2bc^2d^2y + b^2c^2d^2,$$

它必定跟用 $y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4$ 乘 $y^2 - 2ey + e^2$ 所得的式子具有相同的形式,后者形如

---

* 笛卡儿常把方程写为一含未知量的多项式等于零的形式。此时,他会称等号左端的部分为"方程"。——译者

$$y^6 + (f - 2e)y^5 + (g^2 - 2ef + e^2)y^4 + (h^3 - 2eg^2 + e^2 f)y^3$$
$$+ (k^4 - 2eh^3 + e^2 g^2)y^2 + (e^2 h^3 - 2ek^4)y + e^2 k^4。$$

从这两个方程出发可得到另外六个方程，用于确定六个量 f、g、h、k、v 和 s。容易看出，无论给定的曲线可能属于哪一类，这种方法总能提供跟所需考虑的未知量的数目一样多的方程。为了解这些方程，并最终求出我们真正想要得到的唯一的量 v 的值（其余的仅是求 v 的中间媒介），我们首先从第二项确定上述式中的第一个未知量 f，可得 $f = 2e - 2b$。然后，我们依据 $k^4 = \frac{b^2c^2d^2}{e^2}$，可求得同一式中的最后一个未知量 k。从第三项，我们得到第二个量

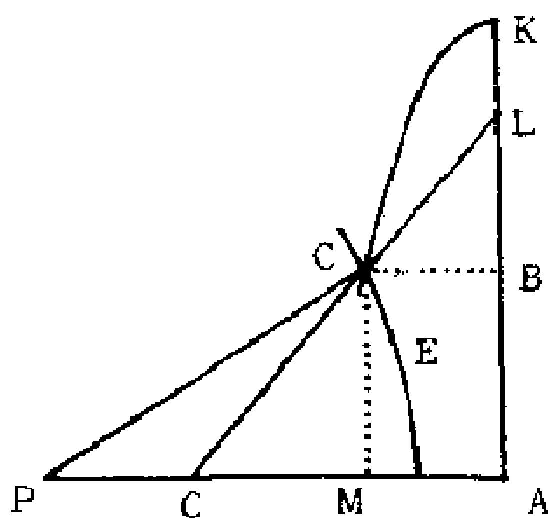
$$g^2 = 3e^2 - 4be - 2cd + b^2 + d^2。$$

由倒数第二项，我们得出倒数第二个量 h，它是

$$h^3 = \frac{2b^2c^2d^2}{e^3} - \frac{2bc^2d^2}{e^2}。$$

同样，我们可循这样的次序做下去，直到求得最后一个量。

那么，我们从相应的一项（这里指第四项）可求得 v，我们有



$$v = \frac{2e^3}{d^2} - \frac{3be^2}{d^2} + \frac{b^2e}{d^2} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{e^2} - \frac{b^2c^2}{e^3}；$$

或者用等于 e 的 y 代入，我们得 AP 的长度为

$$v = \frac{2y^3}{d^2} - \frac{2by^2}{d^2} + \frac{b^2y}{d^2} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{y^2} - \frac{b^2c^2}{y^3}。$$

其次，第二个方程

$$z^2 + \frac{2bcd^2z - 2bcdez - 2cd^2vz - 2bdevz - bd^2s^2 + bd^2v^2 - cd^2s^2 + cd^2v^2}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v}$$

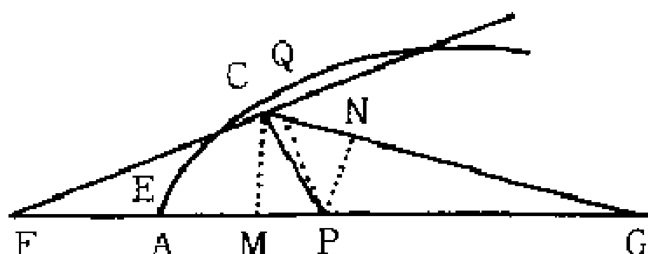
跟 $z^2 - 2fz + f^2$（其中 $f = z$）具有相同的形式，所以 $-2f$ 或 $-2z$ 必须等于

$$\frac{2bcd^2 - 2bcde - 2cd^2v - 2bdev}{bd^2 + ce^2 + e^2v - d^2v},$$

由此可得

$$v = \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}。$$

因此，当我们取 AP 等于上述的 v 值，其中所有的项都是已知的，并将由其确定的点 P 跟 C 相联，这条联线跟曲线交成直角，这正是所要求的。我有充分的理由说，这样的解法适用于可应用几何方法求解的所有曲线。



应该注意，任意选定的、用来将最初的乘积达到所需次数的式子，如我们刚才取的式子

$$y^4 + fy^3 + gy^2 + h^3y + k^4,$$

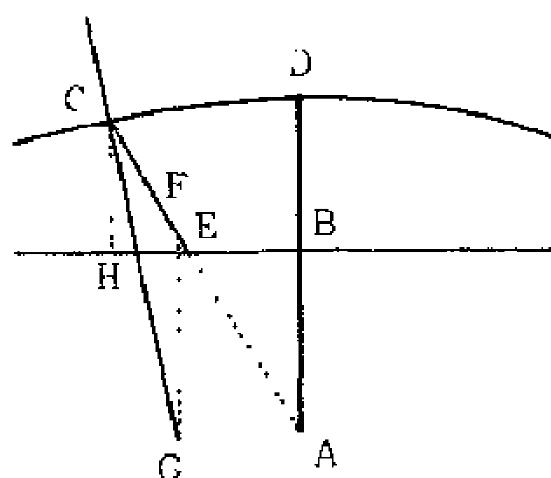
其中的符号＋和－可以随意选定，而不会导致 v 值或 AP 的差异。这一结论很容易发现，不过，若要我来证明我使用的每一个定理，那需要写一本大部头的书，而这是我所不希望的。我宁愿顺便告诉你，你已经看到了有关这种方法的一个例子，它让两个方程具有相同的形式，以便逐项进行比较，从中又得到若干个方程。这种方法适用于无数其它的问题，是我的一般方法所具有的并非无足轻重的特征。

我将不给出与刚刚解释过的方法相关的、我们想得到的切线

和法线的作图法，因为这是很容易的，尽管常常需要某种技巧才能找出简洁的作图方法。

对蚌线完成这一问题作图的例证

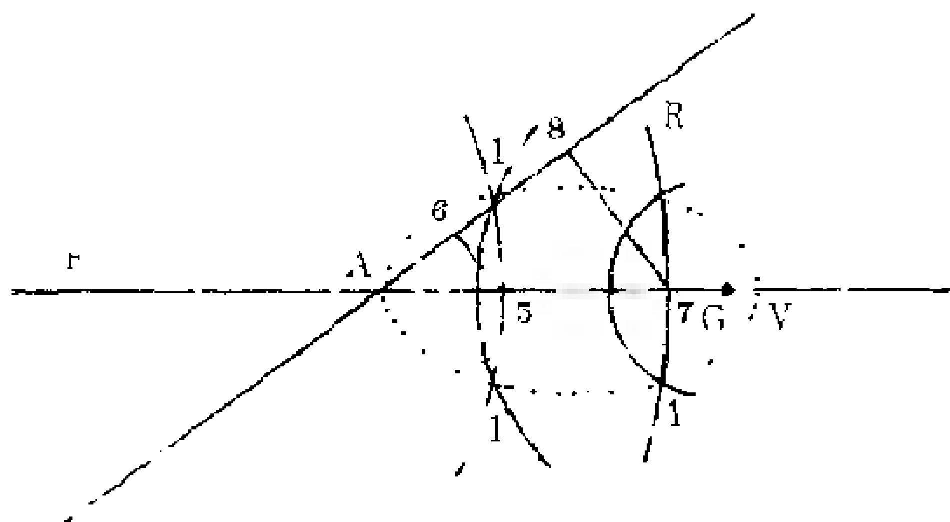
例如，给定 CD 为古人所知的第一条蚌线。令 A 是它的极点，BH 是直尺，使得象 CE 和 DB 这种相交于 A 并含于曲线 CD 和直线 BH 间的直线段皆相等。我们希望找一条直线 CG，它在点 C 与曲线正交。在试图寻找 CG 必须经过的、又位于 BH 上的点时（使用刚才解释过的方法），我们会陷入象刚才给出的计算那样冗长或者更长的计算，而最终的作图可能非常简单。因为我们仅需在 CA 上取 CF 等于 BH 上的垂线 CH；然后，过 F 引 FG 平行于 BA，且等于 EA，于是就定出了点 G，所要找的直线 CG 必定通过它。



对用于光学的四类新的卵形线的说明

为了说明研究这些曲线是有用的，以及它们的各种性质跟圆锥截线的同样重要，我将再来讨论某种卵形线；你们会发现，它们

在反射光学和折光学的理论中非常有用，可以用下述方式描绘：引两条直线 FA 和 AR，它们以任一交角相会于 A，我在其中的一条上任选一点 F（它离 A 的远近依所作卵形线的大小而定）。我以 F 为心作圆，它跟 FA 在稍微超过 A 处穿过 FA，如在点5处。然后，我引直线56，它在6处穿过 AR，使得 A6小于 A5，且 A6比 A5等于任意给定的比值，例如在折光学中应用卵形线时，该比值度量的是折射的程度。做完这些之后，我在直线 FA 上任取一点 G，它与点5在同一侧，使得 AF 比 GA 为那个任意给定的比值。其次，我沿直线 A6划出 RA 等于 GA，并以 G 为心、等于 R6的线段为半径画圆。该圆

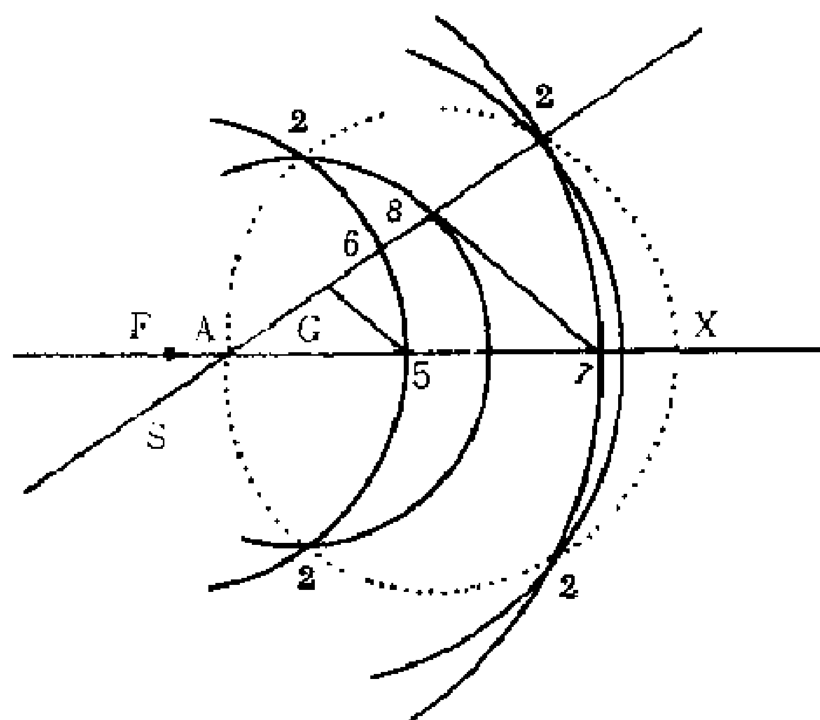


将在两个点1，1处穿过第一个圆，所求的卵形线中的第一个必定通过这两个点。

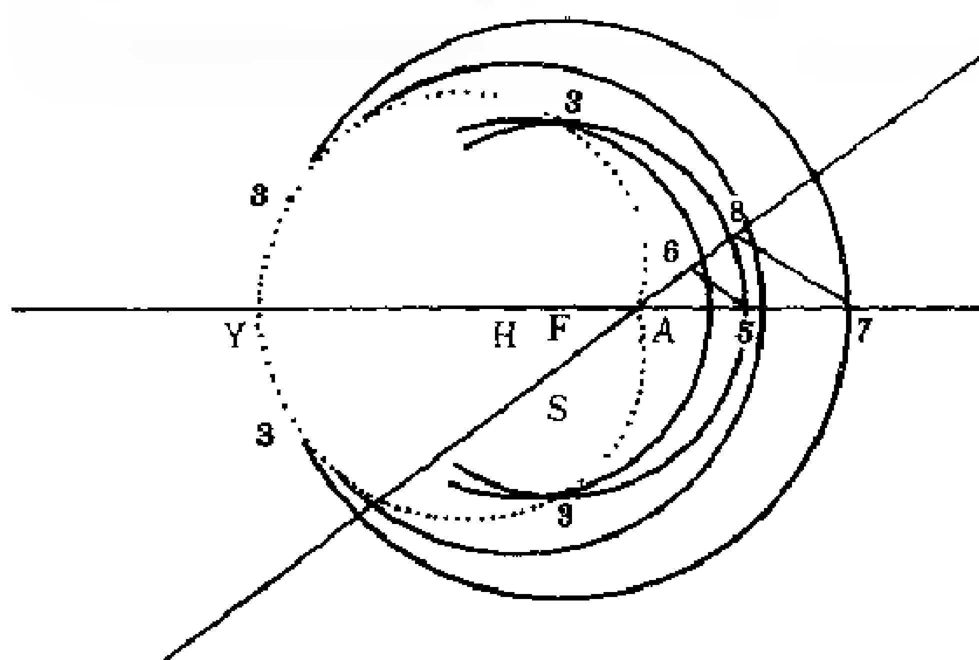
接着，我以 F 为心画圆，它在比点5离 A 稍近或稍远处穿过 FA，例如在点7处。然后，我引78平行于56，并以 G 为心、等于 R8的线段为半径画另一个圆。此圆将在点1，1处穿过点7在其上的圆，这两个点也是同一条卵形线上的点。于是，我们通过引平行于78的直线和画出以 F 和 G 为心的圆，就能找到所要求的那许多点。

在作第二条卵形线时，仅有的差别是我们必须在 A 的另一侧

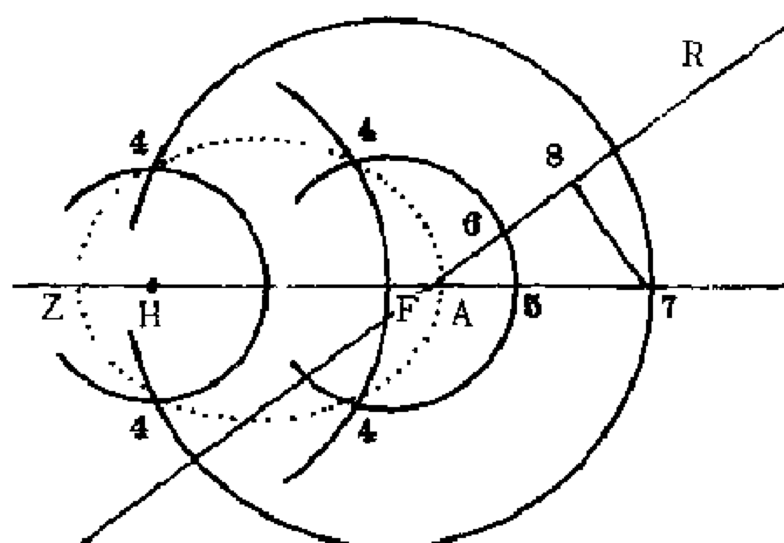
取 AS 等于 AG，用以代替 AR；并且，以 G 为心、穿过以 F 为心且过5的圆的那个圆的半径，必须等于直线段 S6；或者当它穿过7在其上的圆时，半径必须等于 S8，如此等等。这样，这些圆在点2，2处相交，它们即是第二条卵形线 A2X 上的点。



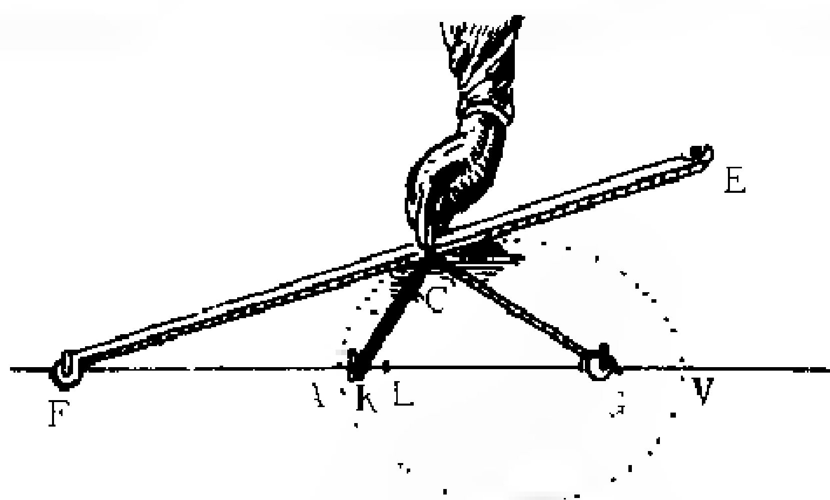
为了作出第三条和第四条卵形线，我们在 A 的另一侧，即 F 所在的同一边，取 AH 以代替 AG。应该注意，这条直线段 AH 必须比 AF 长；在所有这些卵形线中，AF 甚至可以为零，即 F 和 A 相重。然后，取 AR 和 AS，让它们都等于 AH。在画第三条卵形线 A3Y 时，我以 H 为心，等于 S6的线段为半径画圆，它在点3处穿过以 F 为心过5的圆，另一个圆的半径等于 S8，也在标3的点处穿过7在其上的圆，如此等等。



最后，对于第四条卵形线，我以 H 为心，等于 R6、R8的线段为半径画圆，它们在标有4的点处穿过另外的圆。



为了作出同样的这几条卵形线，还有其它许多办法。例如，第一种卵形线 AV（如果我们假定 FA 和 AG 相等），可以用下述方法描绘：将直线段 FG 在 L 处分为两部分，使得 FL∶LG＝A5∶A6，即对应于折射率的比。然后，平分 AL 于 K，令直尺 FE 绕点 F 转动，用手指将细绳 EC 在 C 点压住，此绳系在直尺的端点 E 处，经过 C



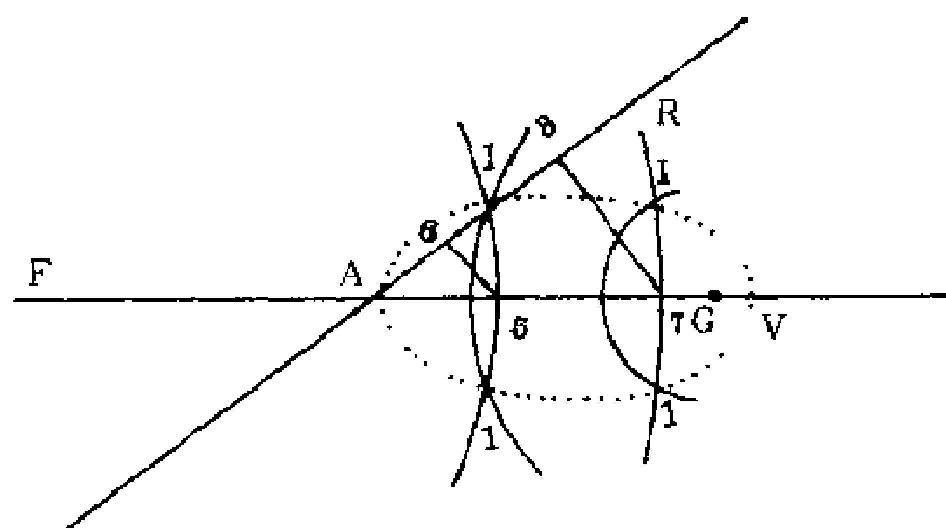
拉到K，返回C后再拉到G，绳的另一端就系牢在这里。于是，整条绳的长度为GA＋AL＋FE－AF，点C就描绘出第一种卵形线，这跟“折光学”中描绘椭圆和双曲线的方式类似。但我不能更多地关注这个主题。

虽然这些卵形线的性质看起来几乎相同，但无论如何属于四种不同的类型，每一种又包含无穷多的子类，而每个子类又象每一类椭圆和双曲线那样包含许多不同的类型；子类的划分依赖于A5对A6的比的值。于是，当AF对AG的比、或AF对AH的比改变时，每一个子类中的卵形线也改变类型，而AG或AH的长度确定了卵形线的大小。

若A5等于A6，第一和第三类卵形线变为直线；在第二类卵形线中，我们能得到所有可能的双曲线，而第四类卵形线包含了所有可能的椭圆。

所论卵形线具有的反射与折射性质

就每一种卵形线而言，有必要进一步考虑它的具有不同性质的两个部分。在第一类卵形线中，朝向 A 的部分使得从 F 出发穿过空气的光线、遇到透镜的凸圆状表面1A1后向 G 会聚，根据折光学可知，该透镜的折射率决定了象 A5对 A6这样的比，卵形线正是依据这个比描绘的。



而朝向 V 的部分，使从 G 出发的所有光线到达形如1V1的凹形镜面后向 F 会聚，镜子的质料按 A5对 A6的比值降低了光线的速度，因为折光学已证明，此种情形下的各个反射角将不会相等，折射角亦然，它们可用相同的方法度量。

现在考虑第二种卵形线。当2A2这个部分作反射用时，同样可假定各反射角不相等。因为若这种形状的镜子采用讨论第一种卵形线时指出的同一种质料制成，那么它将把从 G 出发的所有光线都反射回去，就好象它们是从 F 发出似的。

还要注意，如果直线段 AG 比 AF 长许多，此时镜子的中心(向A)凸，两端则是凹的；因为这样的曲线不再是卵形而是心形的了。另一部分 X2对制作折射透镜有用；通过空气射向 F 的光线，穿过形如 A3Y3的表面之后在玻璃体内射向 H；此处 A3YA 除稍向 A 凹之外，其余部分全是凸的，因此这条曲线也是心形的。这种卵形线的两个部分的差别在于，一部分靠近 F 远离 H，另一部分靠近 H 而远离 F。

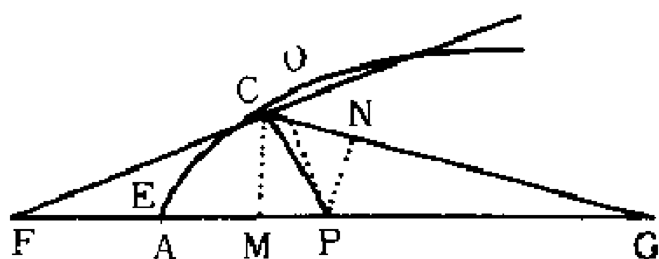
类似地，这些卵形线中的最后一种只用于反射的情形。它的作用是使来自 H 的所有光线，当遇到用前面提到过的同种质料制成的形如 A4Z4凹状曲面时，经反射皆向 F 会聚。

点 F，G 和 H 可称为这些卵形线的"燃火点"，相应于椭圆和双曲线的燃火点，在折光学中就是这样定名的。

我没有提及能由这些卵形线引起的其它几种反射和折射；因为它们只是些相反的或逆的效应，很容易推演出来。

对这些性质的论证

然而，我必须证明已做出的结论。为此目的，在第一种卵形线的第一部分上任取一点 C，并引直线 CP 跟曲线在 C 处成直角。这可用上面给出的方法实现，做法如下：



令 AG＝b，AF＝c，FC＝$c+z$。以 d 对 e 的比——我总是用

它度量所讨论的透镜的折射能力——表示 A5 对 A6 的比，或用于表示能描述该卵形线的类似的直线段之间的比。于是，

$$GC = b - \frac{e}{d}z,$$

由此可知

$$AP = \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{bde + cd^2 + d^2z + e^2z}。$$

我们从 P 引 PQ 垂直于 FC，引 PN 垂直于 GC。现若有 PQ:PN = $d:e$，即，如果 PQ:PN 等于用来度量凸玻璃体 AC 的折射状况的直线段之间的比，那么过 F 射向 C 的光线，必被折射进入玻璃体而且射向 G。这由折光学立即可知。

现在，假如 PQ:PN = $d:e$ 真的成立，让我们用计算来证实结论。直角三角形 PQE 和 CMF 相似，由此可得 CF:CM = FP:PQ 及 $\frac{FP \cdot CM}{CF} = PQ$。此外，直角三角形 PNG 和 CMG 相似，因此 $\frac{GP \cdot CM}{CG} = PN$。由于用同一个数乘或除一个比中的两项并不改变这个比，又若 $\frac{FP \cdot CM}{CF} : \frac{GP \cdot CM}{CG} = d:e$，那么用 CM 除第一个比中的每项，再用 CF 及 CG 乘每项，我们得到 FP·CG:GP·CF = $d:e$。根据作图可知

$$FP = c + \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

或

$$FP = \frac{bcd^2 + c^2d^2 + bd^2z + cd^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z},$$

及

$$CG = b - \frac{e}{d}z。$$

于是，$FP \cdot CG = \frac{b^2cd^2 + bc^2d^2 + b^2d^2z + bcd^2z - bcdez - c^2dez - bdez^2 - cdez^2}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}$

那么，

$$GP = b - \frac{bcd^2 - bcde + bd^2z + ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z};$$

或

$$GP = \frac{b^2de + bcde - be^2z - ce^2z}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z};$$

以及 CF = $c + z$。故

$$GP \cdot CF = \frac{b^2cde + bc^2de + b^2dez + bcdez - bce^2z - c^2e^2z - be^2z^2 - ce^2z^2}{cd^2 + bde - e^2z + d^2z}$$

上述第一个乘积用 d 除后，等于第二个用 e 除，由此可得 PQ：PN = FP·CG：GP·CF = d：e，这就是所要证明的。这个证明经正负号的适当变更，便可用来证明这些卵形线中任一种具有的反射和折射性质；读者可逐个去研究，我不需要在此作进一步的讨论。

这里，我倒有必要对我在“折光学”中的陈述作些补充，大意如下：各种形式的透镜都能同样使来自同一点的光线，经由它们向另一点会聚；这些透镜中，一面凸另一面凹的比起两面皆凸的，是性能更好的燃火镜；另一方面，后者能作成更好的望远镜。我将只描述和解释那些我认为是最具实用价值的透镜，考虑琢磨时的难点。为了完成有关这个主题的理论，我必须再次描绘这种透镜的形状：它的一个面具有随意确定的凸度或凹度，能使所有平行的或来自单个点的光线，在穿过它们之后向一处会聚；还要描绘另一种透镜的形状：它具有同样的效用，但它的两个面是等凸的，或者，它的一个表面的凸度与另一表面的凸度形成给定的比。

如何按我们的要求制作一透镜，使从某一给定点发出的所有光线经透镜的一个表面后会聚于一给定点

第一步，设 G、Y、C 和 F 是给定的点，使得来自 G 或平行于 GA 的光线，穿过一凹状透镜后在 F 处会聚。令 Y 是该透镜内表面的中心，C 是其边缘，并设弦 CMC 已给定，弧 CYC 的高亦已知。首先我们必须确定那些卵形线中的哪一个可用来作此透镜，使得穿

过它而朝向H(尚未确定的一个点)的光线，在离开透镜后向F会聚。

在这些卵形线中，至少有一种不会让光线经其反射或折射而仍不改变方向的；容易看出，为得到上述特殊后果，可利用第三种卵形线上标为3A3或3Y3的任何一段，或者利用第二种卵形线上标为2X2的部分。由于各种情形都可用同一种方法处理，所以无论对哪种情形，我们可以取Y为顶点，C为曲线上的一点，F为燃火点之一。于是尚待确定的只是另一个燃火点H了。为此，考虑FY和FC的差比HY和HC的差为d比e，即度量透镜折射能力的两直线段中较长者跟较短者之比，这样做的理由从描绘卵形线的方法中是显而易见的。

因为直线段FY和FC是给定的，我们可以知道它们的差；又因为知道那两个差的比，故我们能知道HY和HC的差。

又因YM为已知，我们便知MH和HC的差，也就得到了CM，尚需求出的是直角三角形CMH的一边MH。该三角形的另一边CM已经知道，斜边CH和所求边MH的差也已知。因此，我们能容易地确定MH，具体过程如下：

令 $k=CH-MH$，$n=CM$；那么 $\frac{n^2}{2k}-\frac{1}{2}k=MH$，它确定了点 H 的位置。

若 HY 比 HF 长，曲线 CY 必须取为第二类卵形线的第一部分，它已标记为3A3。

要是假定 HY 比 FY 短，会出现两种情形：第一种，HY 超出 HF 的量达到这种程度，使它们的差跟整条线段 FY 的比，大于表示折射能力的直线段中较小的 e 跟较大的 d 之比；即令 $HF=c$，$HY=c+h$，那么 dh 大于 $2ce+eh$。在这种情况，CY 必须取为第三类中同一卵形线的第二部分3Y3。

在第二种情形，dh 小于或等于 $2ce+eh$，CY 取为第二类卵形线的第二部分2X2。

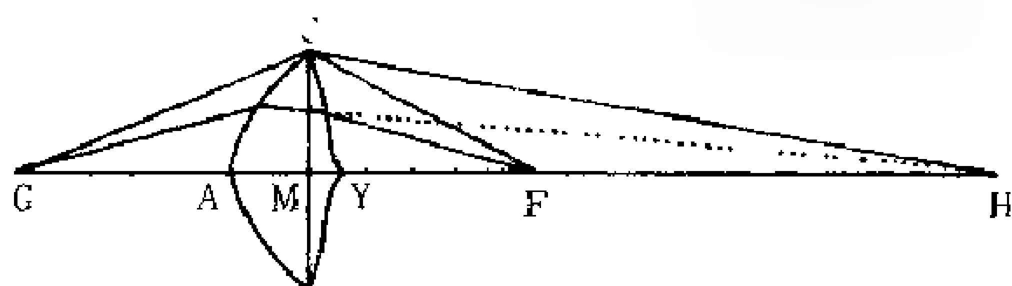
最后，若点 H 和点 F 相重，FY＝FC，那么曲线 YC 是个圆。

我们还需要确定透镜的另一个表面 CAC。若我们设落在它上面的光线平行，它应是以 H 为其一个燃火点的椭圆，其形状容易确定。然而，当我们设光线来自点 G，则透镜必须具有第一类卵形线的第一部分的形状，该卵形线经过点 C，它的两个燃火点是 G 和 H。点 A 看来是它的顶点，依据是：GC 超出 GA 的部分比 HA 超出 HC 的部分等于 d 比 e。因为若令 k 表示 CH 和 HM 的差，x 表示 AM，那么 $x-k$ 表示 AH 和 CH 的差；若令 g 表示皆为已知的 GC 和 GM 的差，那么 $g+x$ 表示 GC 和 GA 的差；由于 $g+x:x-k=d:e$，我们知 $ge+ex=dx-dk$，或 $AM=x=\frac{ge+dk}{d-e}$，它使我们得以确定所求的点 A。

如何制作有如上功能的透镜，而又使一个表面的凸度跟另一表面的凸度或凹度形成给定的比

其次，假设只给定了点 G、C 和 F，以及 AM 对 YM 的比；要求确定透镜 ACY 的形状，使得所有来自点 G 的光线都向 F 会聚。

在这种情况，我们可以利用两种卵形线 AC 和 YC，它们的燃火点分别是 G、H 和 F、H。为了确定它们，让我们首先假设两者共同的燃火点 H 为已知。于是，AM 可由三个点 G、C 和 H 以刚刚解释过的方法确定：即，若 k 表示 CH 和 HM 的差，g 表示 GC 和 GM



的差，又若 AC 是第一类卵形线的第一部分，则我们得到 AM $= \frac{ge - dk}{d - e}$。

于是，我们可依据三个点 F、C 和 H 求得 MY。若 CY 是第二类的一条卵形线的第一部分，我们取 y 代表 MY，f 代表 CF 和 FM 的差，那么 CF 和 FY 的差等于 $f + y$；再令 CH 和 HM 的差等于 k，则 CH 和 HY 的差等于 $k + y$。那么 $k + y : f + y = e : d$，因为该卵形线是第二类的，因此 MY $= \frac{fe - dk}{d - e}$。所以 AM + MY = AY $= \frac{ge + fe}{d - e}$，

由此可得，无论点H可能落在哪一边，直线段AY对GC+CF超出GF的部分的比，总等于表示玻璃体折射能力的两条直线段中较短的e对两直线段之差$d-e$的比，这给出了一条非常有趣的定理。

正在寻找的直线段AY，必须按适当的比例分成AM和MY，因为M是已知的，所以点A、Y、最后还有点H，都可依据前述问题求得。首先，我们必须知道这样求得的直线段AM是大于、等于或小于$\frac{ge}{d-e}$。当出现大于的情形，AC必须取为已考虑过的第三类中的某条卵形线的第一部分。当出现小于的情形，CY必须为某个第一类卵形线的第一部分，AC为某个第三类卵形线的第一部分。最后，当AM等于$\frac{ge}{d-e}$时，曲线AC和CY必须双双皆为双曲线。

上述两个问题的讨论可以推广到其它无穷多种情形，我们将不在这里推演，因为它们对折光学没有实用价值。

我本可以进一步讨论并说明，当透镜的一个表面是给定的，它既非完全平直、亦非由圆锥截线或圆所构成，此时如何确定另一个表面，使得把来自一个给定点的所有光线传送到另一个也是给定的点。这项工作并不比我刚刚解释过的问题更困难；确实，它甚至更容易，因为方法已经公开；然而，我乐于把它留给别人去完成。那样，他们也许会更好地了解和欣赏这里所论证的那些发现，虽然他们自己会遇到某些困难。

如何将涉及平面上的曲线的那些讨论应用于三维空间或曲面上的曲线

在所有的讨论中，我只考虑了可在平面上描绘的曲线，但是我论述的要点很容易应用于所有那样的曲线，它们可想象为某个物

体上的点在三维空间中作规则的运动所生成。具体做法是从所考虑的这种曲线上的每个点，向两个交成直角的平面引垂线段，垂线段的端点将描绘出另两条曲线；对于这两个平面中的每一个上面的这种曲线，它的所有点都可用已经解释过的办法确定，所有这些点又都可以跟这两个平面所共有的那条直线上的点建立起联系；由此，三维曲线上的点就完全确定了。

我们甚至可以在这种曲线的给定点引一条直线跟该曲线成直角，办法很简单，在每个平面内由三维曲线上给定点引出的垂线的垂足处，分别作直线与各自平面内的那条曲线垂直，再过每一条直线作出另外两个平面，分别与含有它们的平面垂直，这样作出的两个平面的交线即是所求的垂直直线。

至此，我认为我在理解曲线方面再没有遗漏什么本质的东西了。

第　三　编

立体及超立体问题的作图

能用于所有问题的作图的曲线

毫无疑问，凡能由一种连续的运动来描绘的曲线都应被接纳进几何，但这并不意味着我们将随机地使用在进行给定问题的作图时首先碰上的曲线。我们总是应该仔细地选择能用来解决问题的最简单的曲线。但应注意，“最简单的曲线”不只是指它最容易描绘，亦非指它能导致所论问题的最容易的论证或作图，而是指它应属于能用来确定所求量的最简单的曲线类之中。

求多比例中项的例证

例如，我相信在求任意数目的比例中项时，没有更容易的方法了，没有哪一种论证会比借助于利用前已解释过的工具 XYZ 描绘的曲线所作的论证更清楚的了。所以，若想求 YA 和 YE 之间的两个比例中项，只需描绘一个圆，YE 为其直径并在 D 点穿过曲线 AD；于是，YD 即是所求的一个比例中项。当对 YD 使用此工具时，论证立即变得一目了然，因为 YA(或 YB)比 YC 等于 YC 比 YD，又等于 YD 比 YE。

类似地，为求 YA 和 YG 之间的四个比例中项，或求 YA 和 YN

之间的六个比例中项，只需画圆 YEG，它跟 AF 的交点确定出直线段 YF，此即四个比例中项之一；或画图 YHN，它跟 AH 的交点确定出直线段 YH，即六个比例中项之一；余者类推。

但曲线 AD 属于第二类，而我们可以利用圆锥截线求两个比例中项，后者是第一类的曲线。再者，四个或六个比例中项可分别用比 AF 和 AH 更低类的曲线求得。因此，利用那些曲线可能在几何上是一种错误。另一方面，徒劳地企图用比问题的性质所限定的曲线类更简单的曲线类来解决作图问题，也将是一种大错。

方程的性质

在给出一些法则以避免这两种错误之前，我必须就方程的性质作些一般性的论述。一个方程总有若干项组成，有的为已知，有的为未知，其中的一些合在一起等于其余的；甚至可以让所有的项

合在一起等于几；后者常常是进行讨论的最好形式。

方程能有几个根

每一个方程都有跟方程中未知量的次数*一样多的不同的根（未知量的值）。例如，设 $x=2$，或 $x-2=0$，又设 $x=3$，或 $x-3=0$，把 $x-2=0$ 和 $x-3=0$ 这两个方程相乘，我们有 $x^2-5x+6=0$ 或 $x^2=5x-6$。这是个方程，其中 x 取值为2，同时，x 还取值为3。若我们接着取 $x-4=0$，并用 $x^2-5x+6=0$ 乘之，我们得到另一个方程 $x^3-9x^2+26x-24=0$，其中 x 是三次的，因此有三个值，即2、3和4。

何为假根

然而，经常会出现一些根是假的、或者说比无更小的情形。于是，如果我们设 x 表示量5这个假根，则我们有 $x+5=0$，它用 $x^3-9x^2+26x-24=0$ 乘之后变为 $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$，这个方程有四个根，即三个真根2、3和4，一个假根5。

---

* 笛卡儿在描述方程的次数时，使用 dimension 这个词，在讨论几何对象的维数时，也用这同一个词。——译者

已知一个根时，如何将方程的次数降低

显然，由上述讨论可知，具有若干个根的方程的各项之和总能被这样的二项式除尽，它由未知量减去真根之一的值、或加上假根之一的值组成。据此，我们能使方程的次数降低。

如何确定任一给定量是否是根

另一方面，若方程各项的和不能被由未知量加或减某个别的量组成的二项式除尽，则这个“别的量”就不是该方程的根。于是，上述方程 $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ 可被 $x-2$、$x-3$、$x-4$ 和 $x+5$ 除尽，而不能被 x 加或减其它任何一个量所除尽。因此，该方程仅有四个根2、3、4和5。

一个方程有多少真根

我们还能确定任一方程所能有的真根与假根的数目，办法如下：一个方程的真根数目跟它所含符号的变化、即从+到−或从−到+的多寡一致；而其假根的数目，跟连续找到两个+号或两个−号的次数一样。

于是，在最后一个方程中，因 $+x^4$ 之后是 $-4x^3$，出现了从 + 到 − 的一次符号变化，$-19x^2$ 之后是 $+106x$，$+106x$ 之后是 -120，又出现了两次变化，所以我们知道有三个真根；因 $-4x^3$ 之后是 $-19x^2$，那么有一个假根。

如何将假根变为真根，以及将真根变为假根

我们还很容易将方程变形，使得它的所有假根都变为真根，所有真根都变为假根。办法是改变第二、第四、第六及所有偶数项的符号，保持第一、第三、第五及其它奇数项的符号不变。这样，若代替

$$+x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0,$$

我们写出

$$+x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0,$$

则我们得到的是具有一个真根5和三个假根2、3、4的方程。

如何将方程的根变大或缩小

当一个方程的根未知，而希望每一个根都增加或减去某个已知数时，我们必须把整个方程中的未知量用另一个量代替，它比原未知量大一个或小一个那个已知数。于是，若希望方程

$$x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$$

的每个根的值增加3，那么用 y 代替 x，并令 y 比 x 大3，即 $y-3=x$。

此时，对于 x^2，我们代之以 $y-3$ 的平方或 y^2-6y+9；对于 x^3，代之以它的立方，即 $y^3-9y^2+27y-27$；对于 x^4，代以四次方，或 $y^4-12y^3+54y^2-108y+81$。在上述方程中代入这些值并进行归并，我们得到

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4-12y^3 & +54y^2 & -108y & +81 \\
+4y^3 & -36y^2 & +108y & -108 \\
 & -19y^2 & +114y & -171 \\
 & & -106y & +318 \\
 & & & -120 \\
\hline
y^4-8y^3 & -y^2 & +8y & =0,
\end{array}$$

或 $$y^3-8y^2-y+8=0。$$

现在，它的真根是8而不是5，因为它已被增加了3。另一方面，若希望同一方程的根都减少3，我们必须令 $y+3=x$、$y^2+6y+9=x^2$ 等等，代替 $x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$，我们得到

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4+12y^3 & +54y^2 & +108y & +81 \\
+4y^3 & +36y^2 & +108y & +108 \\
 & -19y^2 & -114y & -171 \\
 & & -106y & -318 \\
 & & & -120 \\
\hline
y^4+16y^3 & +71y^2 & -4y & -420=0。
\end{array}$$

我们可通过增大真根来缩小假根；或者相反

应该注意，一个方程的真根的加大必使假根以同样的量减小；相反，真根的缩小会使假根增大；若以等于真根或假根的量来减小

它们，则将使根变成零；以比根大的量来减小它，那么会使真根变假、假根变真。所以，给真根增加3，我们就使每个假根都变小了，原先是4的现只是1，原是3的根变成了零，原是2的现在成了真根，它等于1，因为 $-2+3=+1$。这说明为什么方程 $y^3-8y-y+8=0$ 仅有三个根，其中的两个1和8是真根，第三个也是1，但是假根；而另一个方程 $y^4-16y+71y^2-4y-420=0$ 仅有一个真根2（因为 $+5-3=+2$），以及三个假根5、6和7。

如何消去方程中的第二项

于是，这种变换一个方程的根而无须先确定它们的值的方法，产生两个将被证明是有用的结论：第一，我们总能消去第二项。若方程第一和第二项的符号相反，只要使它的真根缩小一个量，该量由第二项中的已知量除以第一项的次数而得；或者，若它们具有相同的符号，可通过使它的根增加同样的量而达到目的。于是，为了消去方程 $y^4+16y^3+71y^2-4y-420=0$ 中的第二项，我用16除以4（即 y^4 中 y 的次数），商为4，我令 $z-4=y$，那么

$$
\begin{array}{r}
z^4-16z^3+96z^2-256z+256\\
+16z^3-192z^2+768z-1024\\
+71z^2-568z+1136\\
-4z+16\\
-420\\
\hline
z^4-25z^2-60z-36=0
\end{array}
$$

方程的真根原为2而现在是6，因为它已增加了4；而假根5、6、7成了1、2和3，因为每个根减小了4。类似地，我们可消去 $x^4-2ax^3+(2a^2$

$c^2)x^2-2a^3x+a^4=0$的第二项；因$2a$除以4得$\frac{1}{2}a$。我们必须令$z+\frac{1}{2}a=x$，那么

$$
\begin{array}{rrrrr}
z^4+2az^3+ & \frac{3}{2}a^2z^2+ & \frac{1}{2}a^3z & & +\frac{1}{16}a^4 \\
-2az^3 & -3a^2z^2 & -\frac{3}{2}a^3z & & -\frac{1}{4}a^4 \\
 & +2a^2z^2 & +\ 2a^3z & & +\frac{1}{2}a^4 \\
 & -c^2z^2 & -ac^2z & & -\frac{1}{4}a^2c^2 \\
 & & -2a^3z & & -a^4 \\
 & & & & +a^4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$z^4+(\frac{1}{2}a^2-c^2)z^2-(a^3+ac^2)z+\frac{5}{16}a^4-\frac{1}{4}a^2c^2=0。$$

若能求出z的值，则加上$\frac{1}{2}a$就得到x的值。

如何使假根变为真根而不让真根变为假根

第二，通过使每个根都增加一个比任何假根都大的量，我们可使所有的根都成为真根。实现这一点后就不会连续出现+或－的项了；进而，第三项中的已知量将大于第二项中已知量的一半的平方。这一点即使在假根是未知时也能办到，因为总能知道它们的近似值，从而可以让根增加一个量，该量应大到我们所需要的程度，

更大些也无妨。于是，若给定

$$x^6+nx^5-6n^2x^4+36n^3x^3-216n^4x^2+1296n^5x-7776n^6=0,$$

令 $y-6n=x$，我们便有

$$\begin{array}{llllll}
y^6\left.\begin{array}{r}-36n\\+n\end{array}\right\} y^5 & \left.\begin{array}{r}+540n^2\\-30n^2\\-6n^2\end{array}\right\} y^4 & \left.\begin{array}{r}-4320n^3\\+360n^3\\+144n^3\\+36n^3\end{array}\right\} y^3 & \left.\begin{array}{r}+19440n^4\\-2160n^4\\-1296n^4\\-648n^4\\-216n^4\end{array}\right\} y^2 & \left.\begin{array}{r}-46656n^5\\+6480n^5\\+5184n^5\\+3888n^5\\+2592n^5\\+1296n^5\end{array}\right\} y & \left.\begin{array}{r}+46656n^6\\-7776n^6\\-7776n^6\\-7776n^6\\-7776n^6\\-7776n^6\\-7776n^6\end{array}\right\}
\end{array}$$

$$y^6-35ny^5+504n^2y^4-3780n^3y^3+15120n^4y^2-27216n^5y=0。$$

显然，第三项中的已知量 $504n^2$ 大于 $\frac{35}{2}n$ 的平方，亦即大于第二项中已知量一半的平方；并且不会出现这种情形，为了假根变真根所需要增加的量，从它跟给定量的比的角度看，会超出上述情形所增加的量。

如何补足方程中的缺项

若我们不需要象上述情形那样让最后一项为零，为此目的就必须使根再增大一些。同样，若想提高一个方程的次数，又要让它的所有的项都出现，比如我们想要替代 $x^5-b=0$ 而得到一个没有一项为零的六次方程；那么，首先将 $x^5-b=0$ 写成 $x^6-bx=0$，并令 $y-a=x$，我们即可得到

$$y^6-6ay^5+15a^2y^4-20a^3y^3+15a^4y^2-(6a^5+b)y+a^6+ab=0。$$

显然，无论量 a 多么小，这个方程的每一项都必定存在。

如何乘或除一个方程的根

我们也可以实现以一个给定的量来乘或除某个方程的所有的根，而不必事先确定出它们的值。为此，假设未知量用一个给定的数乘或除之后等于第二个未知量。然后，用这个给定的量乘或除第二项中的已知量，用这个给定量的平方乘或除第三项中的已知量，用它的立方乘或除第四项中的已知量，…，一直做到最后一项。

如何消除方程中的分数

这种手段对于把方程中的分数项改变成整数是有用的，对各个项的有理化也常常有用。于是，若给定 $x^3-\sqrt{3}x^2+\frac{26}{27}x-\frac{8}{27\sqrt{3}}=0$，设存在符合要求的另一方程，其中所有的项皆以有理数表示。令 $y=\sqrt{3}x$，并以 $\sqrt{3}$ 乘第二项，以3乘第三项，以 $3\sqrt{3}$ 乘最后一项，所得方程为 $y^3-3y^2+\frac{26}{9}y-\frac{8}{9}=0$。接着，我们要求用已知量全以整数表示的另一方程来替代它。令 $z=3y$，以3乘3，9乘 $\frac{26}{9}$，27乘 $\frac{8}{9}$，我们得到

$$z^3-9z^2+26z-24=0。$$

此方程的根是2、3和4；因此前一方程的根为 $\frac{2}{3}$、1和 $\frac{4}{3}$，而第一个方

程的根为$\frac{2}{9}\sqrt{3}$、$\frac{1}{3}\sqrt{3}$和$\frac{4}{9}\sqrt{3}$。

如何使方程任一项中的已知量等于任意给定的量

这种方法还能用于使任一项中的已知量等于某个给定的量。若给定方程

$$x^3-b^2x+c^3=0,$$

要求写出一个方程，使第二项的系数（即b^2）由$3a^2$来替代。令

$$y=x\sqrt{\frac{3a^2}{b^2}},$$

我们得到

$$y^3-3a^2y+\frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3}=0。$$

真根和假根都可能是实的或虚的

无论是真根还是假根，它们并不总是实的；有时它们是虚的；于是，我们总可以想象，每一个方程都具有我已指出过的那样多的根，但并不总是存在确定的量跟所想象得到的每个根相对应。我们可以想象方程$x^3-6x^2+13x-10=0$有三个根，可是仅有一个实根2；对其余两个根，尽管我们可以按刚刚建立的法则使其增大、变零或者倍增，但它们始终是虚的。

平面问题的三次方程的简约

当某个问题的作图蕴含了对一个方程的求解，该方程中未知量达到三次，则我们必须采取如下步骤：

首先，若该方程含有一些分数系数，则用上面解释过的方法将其变为整数；若它含有不尽方根，那么只要可能就将其变为有理数，或用乘法、或用其它容易找到的若干方法中的一种皆可。第二，依次检查最后一项的所有因子，以确定方程的左端部分，是否能被由未知量加或减这些因子中某个所构成的二项式除尽。若是，则该问题是平面问题，即它可用直尺和圆规完成作图；因为任一个二项式中的已知量都是所求的根，或者说，当方程的左端能被此二项式除尽，其商就是二次的了，从这个商出发，如在第一编中解释过的那样，即可求出根。

例如，给定 $y^6-8y^4-124y^2-64=0$。最后一项64可被1、2、4、8、16、32和64除尽；因此，我们必须弄清楚方程的左端是否能被 y^2-1、y^2+1、y^2-2、y^2+2、y^2-4 等二项式除尽。由下式知方程可被 y^2-16 除尽：

$$\begin{array}{llll}
+y^6 & -8y^4 & -124y^2 & -64=0 \\
\underline{-y^6} & \underline{-8y^4} & \underline{-\quad 4y^2} & -16 \\
\quad 0 & \underline{-16y^4} & \underline{-128y^2} & \\
 & -16 & -16 & \\
\hline
 & +y^4+ & 8y^2+4 & =0
\end{array}$$

用含有根的二项式除方程的方法

从最后一项开始，我以-16除-64，得$+4$；把它写成商；以$+y^2$乘$+4$，得$+4y^2$，并记成被除数（但必须永远采用由这种乘法所得符号之相反的符号）。将$-124y^2$和$-4y^2$相加，我得到$-128y^2$。用-16来除它，我得到商$+8y^2$；再用y^2来乘，我应得出$-8y^4$，将其加到相应的项$-8y^4$上之后作为被除数，即$-16y^4$，它被-16除后的商为$+y^4$；再将$-y^6$加到$+y^6$上得到零，这表明这一除法除尽了。

然而，若有余数存在、或者说如果改变后的项不能正好被16除尽，那么很清楚，该二项式并不是一个因子。

类似地，给定

$$y^6 \left.\begin{matrix} +a^2 \\ -2c^2 \end{matrix}\right\} y^4 \quad \left.\begin{matrix} a^4 \\ +c^4 \end{matrix}\right\} y^2 \quad \left.\begin{matrix} a^6 \\ -2a^4c^2 \\ a^2c^4 \end{matrix}\right\} = 0,$$

其最后一项可被a、a^2、a^2+c^2和a^3+ac^2等除尽，但仅需考虑其中的两个，即a^2和a^2+c^2。其余的将导致比倒数第二项中已知量的次数更高或更低的商，使除法不可能进行。注意，此处我将把y^6考虑成是三次的，因为不存在的y^5、y^3或y这样的项。试一下二项式

$$y^2 \quad a^2 - c^2 = 0,$$

我们发现除法可按下式进行：

$$
\begin{array}{llll}
+y^6 + a^2 & a^4 & -a^6 & \\
-y^6 - 2c^2\} y^4 & +c^4\ \ y^2 & -2a^4c^2 & \\
0 - 2a^2 & -a^4 & -a^2c^4 & \Big\} = 0 \\
+c^2\} y^4 & -a^2c^2\ \ y^2 & a^2 \quad c^2 & \\
-a^2 - c^2 & -a^2 - c^2 & & \\
+y & +2a & +a^4 & \\
 & -c^2\ \ y^2 & +a^2c^2 & = 0。
\end{array}
$$

这说明，a^2+c^2是所求的根，这是容易用乘法加以验证的。

方程为三次的立体问题

当所讨论的方程找不到二项式因子时，依赖这一方程的原问题肯定是立体的。此时，再试图仅以圆和直线去实现问题的作图就是大错了，正如利用圆锥截线去完成仅需圆的作图问题一样；因为任何无知都可称为错误。

平面问题的四次方程的简约，立体问题

若给定一个方程，其中未知量是四次的，在除去了不尽方根和分数后，查看一下是否存在以表达式最后一项的因子为其一项的二项式，它能除尽左边的部分。如果能找到这种二项式，那么该二项式中的已知量即是所求的根，或者说，作除法之后所得的方程仅是三次的了；当然我们必须用上述同样的方法来处理。如果找不到

这样的三项式，我们必须将根增大或缩小，以便消去第二项，其方法已在前面作过解释；然后，按下述方法将其化为另一个三次方程；替代

$$x^4 \pm px^2 \pm qx \pm r = 0,$$

我们得到

$$y^6 \pm 2py^4 + (p^2 \pm 4r)y^2 - q^2 = 0。$$

对于双符号，若第一式中出现 $+p$，第二式中就取 $+2p$；若第一式中出现 $-p$，则第二式中应写 $-2p$；相反地，若第一式中为 $+r$，第二式中取 $-4r$，若为 $-r$，则取 $+4r$。但无论第一式中所含为 $+q$ 或 $-q$，在第二式中我们总是写 $-q^2$ 和 $+p^2$，倘若 x^4 和 y^6 都取 + 号的话；否则我们写 $+q^2$ 和 $-p^2$。例如，给定

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

以下式替代它：

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0.$$

因为，当 $p = -4$ 时，我们用 $-8y^4$ 替代 $2py^4$；当 $r = 35$ 时，我们用 $(16 - 140)y^2$ 或 $-124y^2$ 替代 $(p^2 - 4r)y^2$；当 $q = 8$ 时，我们用 -64 替代 $-q^2$。类似的，替代

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0,$$

我们必须写下

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0,$$

因为34是17的两倍，313是17的平方加6的四倍，400是20的平方。

使用同样的办法，替代

$$+z^4 + \left(\frac{1}{2}a^2 - c^2\right)z^2 - (a^3 + ac^2)z - \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0,$$

我们必须写出

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (c^4 - a^4)y^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4 = 0;$$

因为

$$p = \frac{1}{2}a^2 - c^2,\ p^2 = \frac{1}{4}a^4 - a^2c^2 + c^4,\ 4r = -\frac{5}{4}a^4 + a^2c^2,$$

最后，

$$q^2 = a^6 - 2a^4c^2 + a^2c^4。$$

当方程已被约化为三次时，y^2的值可以用已解释过的方法求得。若做不到这一点，我们便无需继续做下去，因为问题必然是立体的。若能求出y^2的值，我们可以利用它把前面的方程分成另外两个方程，其中每个都是二次的，它们的根跟原方程的根相同。替代$+x^4 + px^2 \pm qx \pm r = 0$，我们可写出两个方程：

$$+x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2y} = 0$$

和

$$+x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{2}p \pm \frac{q}{2y} = 0$$

对于双符号，当p取加号时，在每个新方程中就取$+\frac{1}{2}p$；当p取减号时，就取$-\frac{1}{2}p$。若q取加号，则当我们取$-yx$时，相应地取$+\frac{q}{2y}$，当取$+yx$时，则用$-\frac{q}{2y}$；若q取负号，情况正好相反。所以，我们容易确定所论方程的所有的根。接着，我们只要使用圆和直线即可完成与方程的解相关的问题的作图。例如，以$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$替代$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$，我们可求出$y^2 = 16$；于是替代$+x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$的两个方程为$+x^2 - 4x - 3 = 0$和$+x^2 + 4x + 2 = 0$。因为$y = 4$，$\frac{1}{2}y^2 = 8$，$p = 17$，$q = 20$，故有

$$+\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = -3$$

和

$$+\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = +2。$$

我们求出这两个方程的根，也就得到了含x^4的那个方程的根，它们一个是真根$\sqrt{7}+2$，三个是假根$\sqrt{7}-2$，$2+\sqrt{2}$和$2-\sqrt{2}$。当给定$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$，我们得到$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$；因后一方程的根是16，我们必定可写出$x^2 - 4x + 5 = 0$和$x^2 + 4x + 7 = 0$。

因为对于这一情形，

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}=5$$

且

$$+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}=7。$$

这两个方程即无真根亦无假根，由此可知，原方程的四个根都是虚的；跟方程的解相关的问题是平面问题，但其作图却是不可能的，因为那些给定的量不能协调一致。

类似地，对已给的

$$z^4+(\frac{1}{2}a^2-c^2)z^2-(a^3+ac^2)z+\frac{5}{16}a^4-\frac{1}{4}a^2c^2=0，$$

因我们得出了 $y^2=a^2+c^2$，所以必定可写出

$$z^2-\sqrt{a^2+c^2}z+\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}a\sqrt{a^2-c^2}=0$$

和

$$z^2+\sqrt{a^2+c^2}z+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}=0。$$

由于 $y=\sqrt{a^2+c^2}$，$+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p=\frac{3}{4}a^2$，且$\frac{p}{2y}=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}$，故我们有

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}$$

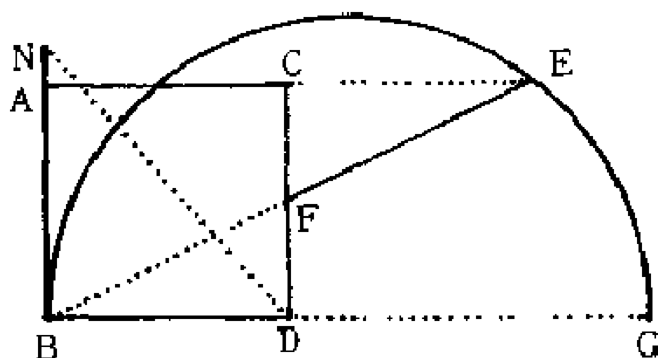
或

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}。$$

利用简约手段的例证

为了强调这条法则的价值，我将用它来解决一个问题。给定正方形 AD 和直线段 BN，要求延长 AC 边至 E，使得在 EB 上以 E 为始点标出的 EF 等于 NB。

帕普斯指出，若 BD 延长至 G，使得 DG＝DN，并以 BG 为直径在其上作一圆，则直线 AC（延长后）与此圆的圆周的交点即为所求的点。



不熟悉此种作图的人可能不会发现它。如果他们运用此处提议的方法，他们绝不会想到取 DG 为未知量，而会去取 CF 或 FD，因为后两者中的任何一个都能更加容易地导出方程。他们会得到一个方程，但不借助于我刚刚解释过的法则，解起来不容易。

比如，令 a 表示 BD 或 CD，c 表示 EF，x 表示 DF，我们有 CF＝$a-x$；又因 CF 比 FE 等于 FD 比 BF，我们可写作

$$a-x:c=x:\mathrm{BF},$$

因此 $\mathrm{BF}=\frac{cx}{a-x}$。在直角三角形 BDF 中，其边为 x 和 a，它们的平方和 x^2+a^2 等于斜边的平方，即 $\frac{c^2x^2}{x^2-2ax+a^2}$。两者同用 $x^2-2ax+a^2$ 乘，我们得到方程

$$x^4-2ax^3+2a^2x^2-2a^3x+a^4=c^2x^2,$$

或
$$x^4-2ax^3+(2a^2-c^2)x^2-2a^3x+a^4=0。$$

根据前述法则，我们便可知道其根，即直线段 DF 的长度为

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}c^2}-\sqrt{\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}。$$

另一方面，若我们将 BF、CE 或 BE 作为未知量，我们也会得到一个四次方程，但解起来比较容易，得到它也相当简单。

若利用 DG，则得出方程将相当困难，但解方程十分简单。我讲这些只是为了提醒你，当所提出的问题不是立体问题时，若用某种方法导出了非常复杂的方程，那么一般而论，必定存在其它的方法能找到更简单的方程。

我可以再讲几种不同的、用于解三次或四次方程的法则，不过它们也许是多余的，因为任何一个平面问题的作图都可用已给出的法则解决。

简约四次以上方程的一般法则

我倒想说说有关五次、六次或更高次的方程的法则，不过我喜欢把它们归总在一起考虑，并叙述下面这个一般法则：

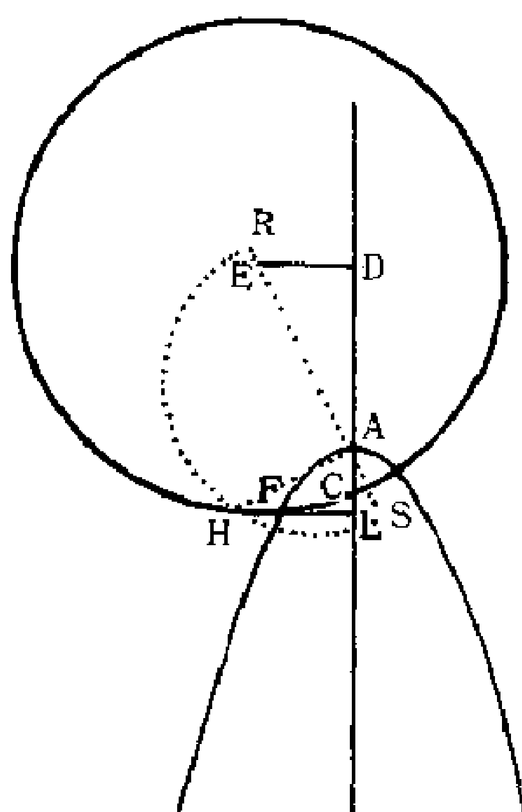
首先，尽力把给定方程变成另一种形式，它的次数与原方程相同，但可由两个次数较低的方程相乘而得。假如为此所作的一切努力都不成功，那么可以肯定所给方程不能约化为更简单的方程；所以，若它是三或四次的，则依赖于该方程的问题就是立体问题；若它是五次或六次的，则问题的复杂性又增高一级，依此类推。我略去了大部分论述的论证，因为对于我来说太简单；如果你能不怕麻烦地对它们系统地进行检验，那么论证本身就会显现在你面前，就学习而论，这比起只是阅读更有价值。

所有简约为三或四次方程的立体问题的一般作图法则

当确知所提出的是立体问题，那么无论问题所依赖的方程是四次的或仅是三次的，其根总可以依靠三种圆锥截线中的某一种求得，甚或靠它们中某一种的某个部分（无论多么小的一段）加上圆和直线求出。我将满足于在此给出靠抛物线就能将根全部求出的一般法则，因为从某种角度看，它是那些曲线中最简单的。

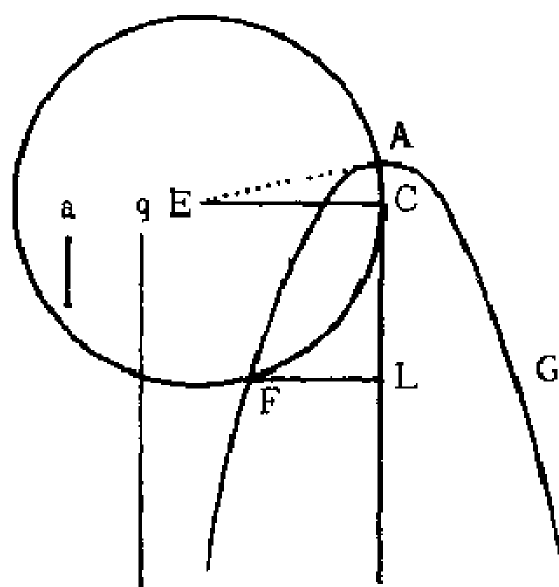
首先，当方程中的第二项不是零时，就将它消去。于是，若给定的方程是三次的，它可化为 $z^3 = \pm apz \pm a^2q$ 这种形式；若它是四次的，则可化为 $z^4 = \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3r$。当选定 a 作为单位，前者可写成 $z^3 = \pm pz \pm q$，后者变为 $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r$。设抛物线 FAG 已描绘好；并设 ACDKL 为

其轴，a 或 l 为其正焦弦，它等于 2AC（C 在抛物线内），A 为其顶点。截取 $CD=\frac{1}{2}p$，使得当方程含有 $+p$ 时，点 D 和点 A 落在 C 的同一侧，而当方程含有 $-p$ 时，它们落在 C 的两侧。然后，在点 D（或当 $p=0$ 时，在点 C）处画 DE 垂直于 CD，使得 DE 等于 $\frac{1}{2}q$；当给定方程是二次（即 r 为零）时，以 E 为心、AE 为半径作圆 FG。



若方程含有 $+r$，那么，在沿长了的 AE 的一侧截取 AR 等于 r，在另一侧截取 AS 等于抛物线的正焦弦，即等于1；然后，以 RS 为直径在其上作圆。于是，若画 AH 垂直于 AE，它将与圆 RHS 在点 H 相交，另一圆 FHG 必经过此点。

若方程含有 $-r$，以 AE 为直径在其上作圆，在圆内嵌入一条等于 AH 的线段 AI；那么，第一个圆必定经过点 I。



现在，圆 FG 可能在1个、2个、3个或4个点处与抛物线相交或切触；如果从这些点向轴上引垂线，它们就代表了方程所有的根，或是真根、或是假

根。若量 q 为正，真根将是诸如跟圆心 E 同在抛物线一侧的垂线 FL；而其余如 GK 这样的将是假根。另一方面，若 q 是负的，真根将是在另一侧的垂线，假根或者说负根*将跟圆心 E 在同一侧面。若圆跟抛物线即不相交也不相切，这表明方程即无真根、亦无假根，此时所有的根都是虚的。

这条法则显然正是我们所能期待的、即具一般性又是很完全的法则，要论证它也十分容易。若以 z 代表如上作出的直线段 GK，那么 AK 为 z^2，因为据抛物线的性质可知，GK 是 AK 跟正焦弦（它等于1）之间的比例中项。所以，当从 AK 中减去 AC 或 $\frac{1}{2}$ 及 CD 或 $\frac{1}{2}p$ 之后，所余的正是 DK 或 EM，它等于 $z^2-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}$，其平方为

$$z^4-pz^2-z^2+\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}。$$

又因 DE＝KM＝$\frac{1}{2}q$，整条直线段 GM＝$z+\frac{1}{2}q$，GM 的平方等于 $z^2+qz+\frac{1}{4}q^2$。将上述两个平方相加，我们得 $z^4-pz+qz+\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}$。此即 GE 的平方，因为 GE 是直角三角形 EMG 的斜边。

* 笛卡儿在这里首次直接使用"假根"的同义语"负根"。原文为"Les fausses ou moindres que rien"，直译为：假根或比无还小的根。——译者

但 GE 又是圆 FG 的半径，因此可用另一种方式表示。因 $ED=\frac{1}{2}q$，$AD=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}$，ADE 是直角，我们可得

$$EA=\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}。$$

于是，由 HA 是 AS（或 1）跟 AR（或 r）之间的比例中项，可得 $HA=\sqrt{r}$；又因 EAH 是直角，HE 或 EG 的平方为

$$\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}+r,$$

我们从这个表达式和已得到的那个式子可导出一个方程。该方程形如 $z^4=pz^2-qz+r$，从而证明了直线段 GK、或者说 z 是这个方程的根。当你对所有其它的情形应用这种方法时，只需将符号作适当的变化，

你会确信它的用途，因此，我无需再就这种方法多费笔墨。

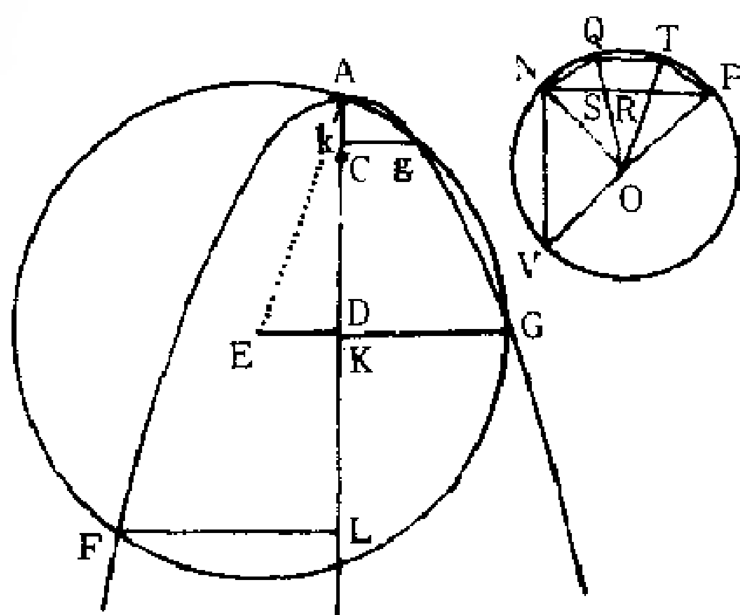
对比例中项的求法

现在让我们利用此法求直线段 a 和 q 之间的两个比例中项。显然，若我们用 z 表示两比例中项中的一个，则有 $a:z=z:\frac{z^2}{a}=\frac{z^2}{a}:\frac{z^3}{a^2}$。我们由此得到 q 和 $\frac{z^3}{a^2}$ 之间关系的方程，即 $z^3=a^2q$。

以 AC 方向为轴描绘一条抛物线 FAG，AC 等于 $\frac{1}{2}a$，即等于正焦弦的一半。然后，作 CE 等于 $\frac{1}{2}q$，它在点 C 与 AC 垂直，并描绘以 E 为心、通过 A 的圆 AF。于是，FL 和 LA 为所求的比例中项。

角的三等分

再举一例，设要求将角 NOP，或更贴切地说将圆弧 NQTR 分成三等分。令 $NO=1$ 为该圆的半径，$NP=q$ 为给定弧所对的弦，$NQ=z$ 为该弧的三分之一所对的弦，于是，方程应为 $z^3=3z-q$。因为，联接 NQ、OQ 和 OT，并引 QS 平行于 TO，显然可知 NO 比 NQ 等于 NQ 比 QR，且等于 QR 比 RS。又因 $NO=1$，$NQ=z$，故 $QR=z^2$，$RS=z^3$；由于 NP(或 q)跟 NQ(或 z)的三倍相比只差 RS(或 z^3)，我们立即得到 $q=3z-z^3$，或 $z^3=3z-q$。



描绘一条抛物线FAG，使得正焦弦的二分之一CA等于$\frac{1}{2}$；取CD=$\frac{3}{2}$，垂线DE=$\frac{1}{2}q$；然后，以E为心作过A的圆FAgG。该圆与抛物线除顶点A外还交于三点F、g和G。这说明已得的方程有三个根，即两个真根GK和gk，一个假根FL。两个根中的较小者gk应取作所求直线段NQ的长，因另一个根GK等于NV，而NV弦所对的弧为VNP弧的三分之一，弧VNP跟弧NQP合在一起组成一个圆；假根FL等于QN和NV的和，这是容易证明的。

所有立体问题可约化为上述两种作图

我不需要再举另外的例子，因为除了求两个比例中项和三等分一个角之外，所有立体问题的作图都不必用到这条法则。你只要注意以下几点，上述结论便一目了然：这些问题中之最困难者都可由三次或四次方程表示；所有四次方程又都能利用别的不超过三

次的方程约简为三次方程；最后，那些三次方程中的第二项都可消去；故每一个方程可化为如下形式中的一种：

$z^3=-pz+q$，　$z^3=+pz+q$，　$z^3=+pz-q$。

若我们得到的是 $z^3=-pz+q$，根据被卡当(Cardan)归在西皮奥·费雷乌斯(Scipio Ferreus)名下的一条法则，我们可求出其根为

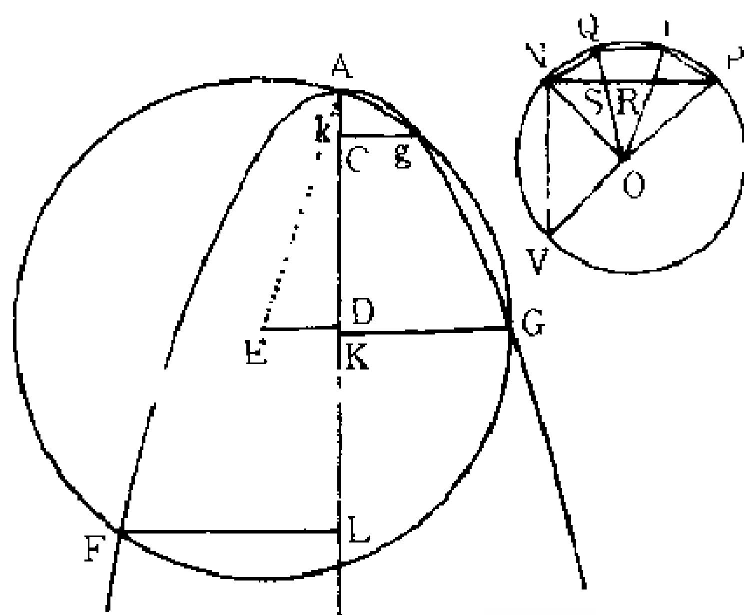
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}。$$

类似地，当我们得到 $z^3=+pz+q$，其中最后一项的一半的平方大于倒数第二项中已知量的三分之一的立方，我们根据相当的法则求出的根为

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}。$$

很清楚，所有能约简成这两种形式的方程中任一种的问题，除了对某些已知量开立方根之外，无需利用圆锥截线就能完成其作图，而开立方根等价于求该量跟单位之间的两个比例中项。若我们得到 $z^3=+pz+q$，其中最后一项之半的平方不大于倒数第二项中已知量的三分之一的立方，则以等于 $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ 的 NO 为半径作圆 NQPV，NO 即单位跟已知量 p 的三分之一两者间的比例中项。然后，取 $NP=\frac{3q}{p}$，即让 NP 与另一已知量 q 的比等于1与 $\frac{1}{3}p$ 的比，并使 NP 内接于圆。将两段弧 NQP 和 NVP 各自分成三个相等的部分，所求的根即为 NQ 与 NV 之和，其中 NQ 是第一段弧的三分之一所对的弦，NV 是第二段弧的三分之一所对的弦。

最后，假设我们得到的是 $z^3=pz-q$。作圆 NQPV，其半径 NO 等于 $\sqrt{\frac{1}{3}p}$，令 NP(它等于 $\frac{3q}{p}$)内接于此圆；那么，弧 NQP 的三分之一所



对的弦 NQ 将是第一个所求的根，而另一段弧的三分之一所对的弦 NV 是第二个所求的根。我们必须考虑一种例外情形，即最后一项之半的平方大于倒数第二项中已知量的三分之一的立方；此时，直线段 NP 无法嵌在圆内，因为它比直径还长。在这种情形，原是真根的那两个根成了虚根，而唯一的实根是先前的那个假根，据卡当的法则，它应为

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}。$$

表示三次方程的所有根的方法，此法可推广到所有四次方程的情形

还应该说明，这种依据根与某些立方体（我们仅知道它的体积）的边的关系表示根的方法，绝不比另一种方法更清晰和简单，

后者依据的是根与某些弧段(或者说圆上的某些部分)所对弦的关系。此时我们已知的是弧段的三倍长。那些无法用卡当的方法求出的三次方程的根，可用这里指出的方法表示得象任何其它方程的根一样清晰，甚至更加清晰。

例如，可以认为我们知道了方程 $z^3 = qz + p$ 的一个根，因为我们知道它是两条直线段的和，其中之一是一个立方体的边，该立方体的体积为 $\frac{1}{2}q$ 加上面积为 $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ 的正方形的边，另一条是另外一个立方体的边，此立方体的体积等于 $\frac{1}{2}q$ 减去面积为 $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ 的正方形的边。这就是卡当的方法所提供的有关根的情况。无需怀疑，当方程 $z^3 = +qz - p$ 的根的值被看成是嵌在半径为 $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ 的圆上的弦的长度(该弦所对的弧为长度等于 $\frac{3q}{p}$ 的弦所对的弧的三分之一)时，我们能更清楚地想象它、了解它。

确实，这些术语比其它说法简单得多；当使用特殊符号来表示所论及的弦时，表述就更精炼了，正如使用符号 $\sqrt[3]{\ }$ 来表示立方体的边一样。

运用跟已解释过的方法类似的方法，我们能够表示任何四次方程的根，我觉得我无须在这方面作进一步的探究；由于其性质所定，我们已不可能用更简单的术语来表示这些根了，也不可能使用更简单同时又更具普遍性的作图法来确定它们。

为何立体问题的作图非要用圆锥截线，解更复杂的问题需要其它更复杂的曲线

我还一直没有说明为什么我敢于宣称什么是可能的、什么是不可能的理由。但是，假如记住我所用的方法是把出现在几何学家面前的所有问题，都约化为单一的类型，即化为求方程的根的值的问题，那么，显然可以列出一张包括所有求根方法的一览表，从而很容易证明我们的方法最简单、最具普遍性。特别地，如我已说过的，立体问题非利用比圆更复杂的曲线不能完成其作图。由此事实立即可知，它们都可约化为两种作图，其一即求两条已知直线段之间的两个比例中项，另一种是求出将给定弧分成三个相等部分的两个点。因为圆的弯曲度仅依赖于圆心和圆周上所有点之间的简单关系，所以圆仅能用于确定两端点间的一个点，如象求两条给定直线段之间的一个比例中项或平分一段给定的弧；另一方面，圆锥截线的弯曲度要依赖两种不同的对象，因此可用于确定两个不同的点。

基于类似的理由，复杂程度超过立体问题的任何问题，包括求四个比例中项或是分一个角为五个相等的部分，都不可能利用圆锥截线中的一种完成其作图。

因此我相信，在我给出那种普遍的法则，即如前面已解释过的、利用抛物线和直线的交点所描绘的曲线来解决所给问题的作图之后，我实际上已能解决所有可能解决的问题；我确信，不存在性质更为简单的曲线能服务于这一目标，你也已经看到，在古人给

予极大注意的那个问题中，这种曲线紧随在圆锥截线之后。在解决这类问题时顺次提出了所有应被接纳入几何的曲线。

需要不高于六次的方程的所有问题之作图的一般法则

当你为完成这类问题的作图而寻找需要用到的量时，你已经知道该怎样办就必定能写出一个方程，它的次数不会超过5或6。你还知道如何使方程的根增大，从而使它们都成为真根，同时使第三项中的已知量大于第二项中的已知量之半的平方。还有，若方程不超过五次，它总能变为一个六次方程，并使得方程不缺项。

为了依靠上述单一的法则克服所有这些困难，我现在来考虑所有使用过的办法，将方程约化为如下形式：

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0,$$

其中 q 大于 $\frac{1}{2}p$ 的平方。

BK 沿两个方向随意延长，在点 B 引 AB 垂直于 BK、且等于 $\frac{1}{2}p$。在分开的平面上描绘抛物线 CDF，其主正焦弦为

$$\sqrt{\frac{t}{\sqrt{u}} + q - \frac{1}{4}p^2},$$

我们用 n 代表它。

现在，把画有该抛物线的平面放到画有直线 AB 和 BK 的平面上，让抛物线的轴 DE 落在直线 BK 上。取点 E，使 $DE = \frac{2\sqrt{u}}{pn}$，并放置一把直尺连接点 E 和下层平面上的点 A。持着直尺使它总是连着这两个点，再上下拉动抛物线而令其轴不离开 BK。于是，抛物

线与直线的交点 C 将描绘出一条曲线 ACN，它可用于所提问题的作图。

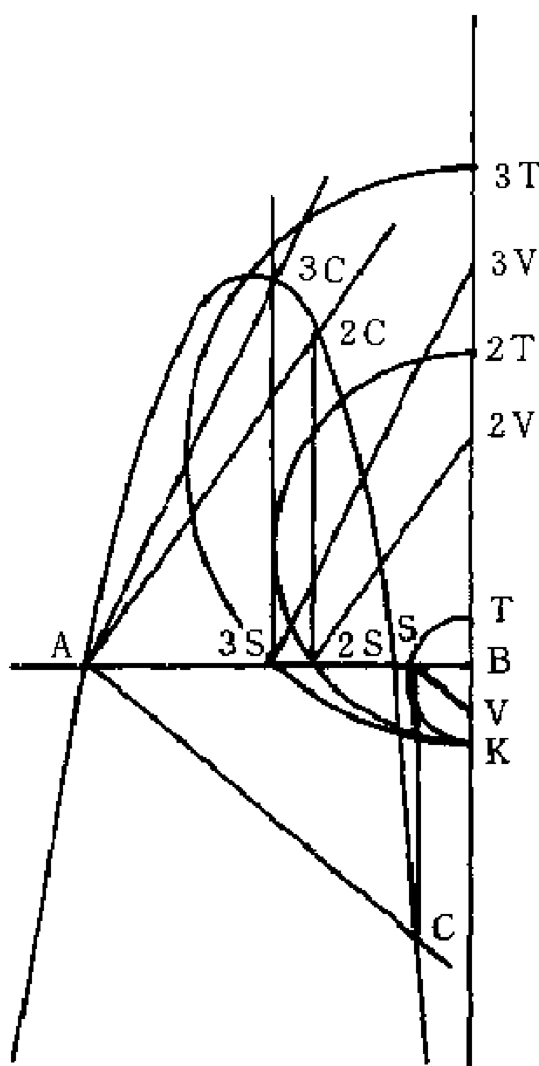
描绘出这条曲线后，在抛物线凹的那边取定 BK 上的一个点 L，使 BL = DE = $\frac{2\sqrt{u}}{pn}$；然后，在 BK 上朝 B 的方向划出 LH 等于 $\frac{t}{2n\sqrt{u}}$，并从 H 在曲线 ACN 所在的那侧引 HI 垂直于 LH。取 HI 等于

$$\frac{r}{2n^2}+\frac{\sqrt{u}}{n^2}+\frac{pt}{4n^2\sqrt{u}},$$

为简洁起见，我们可令其为 $\frac{m}{n^2}$。我们再连接 L 和 I，以 LI 为直径并在其上描绘圆 LPI；然后，在该圆内嵌入等于 $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{u}}{n^2}}$ 的直线段 LP。最后，以 I 为心画过 P 的圆 PCN。这个圆与曲线 ACN 相交或相切触的点数跟方程具有的根的数目一样多；因此，由这些点引出的与 BK 垂直的 CG、NR、QO 等垂线段就是所求的根。这条法则绝不会失效，也不允许任何例外发生。

因为，若量 s 与其它的量 p、q、r、t、u 相比有如此之大，以至直线段 LP 比圆 LI 的直径还长，根本不可能嵌在圆内，那么，所论问题的每一个根将都是虚根；若圆 IP 如此之小，以至跟曲线 ACN 没

有任何交点，方程的根也皆是虚根。一般而论，圆 IP 将跟曲线 ACN 交于六个不同的点，即方程可有六个不同的根。如果交点不足此数，说明某些根相等或有的是虚根。



当然，如果你觉得用移动抛物线描绘曲线 ACN 的方法太麻烦，那么还有许多其它的办法。我们可以如前一样取定 AB 和 BL，让 BK 等于该抛物线的正焦弦；并描绘出半圆 KST，使其圆心在 BK 上，与 AB 交于某点 S。然后，从半圆的端点 T 出发，向 K 的方向取 TV 等于 BL，再连接 S 和 V。过 A 引 AC 平行于 SV，并过 S 引 SC 平行于 BK；那么，AC 和 SC 的交点 C 就是所求曲线上的一个点。用这种方法，我们可以如愿找出位于该曲线上的任意多个点。

以上结论的证明是非常简单的。置直尺 AE 和抛物线 FD 双双经过点 C。这是总能办到的，因为 C 落在曲线 ACN 上，而后者是由该抛物线和直尺的交点描绘出来的。若我们令 $CG=y$，则 GD 将等于 $\frac{y^2}{n}$，因为正焦弦 n 与 CG 的比等于 CG 与 GD 的比。于是，$DE=\frac{2\sqrt{u}}{pm}$，从 GD 中减去 DE，我们得 $GE=\frac{y^2}{n}-\frac{2\sqrt{u}}{pm}$。因为 AB 比 BE 等于 CG 比 GE，且 AB 等于 $\frac{1}{2}p$，因此，$BE=\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{u}}{ny}$。现令 C 为由

直线SC(它平行于BK)和AC(它平行于SV)的交点所生成的曲线上的一个点。并令$SB=CG=y$，抛物线的正焦弦$BK=n$。那么，$BT=\frac{y^2}{n}$，因为KB比BS等于BS比BT；又因$TV=BL=\frac{2\sqrt{u}}{pn}$，我们得$BV=\frac{y^2}{n}-\frac{2\sqrt{u}}{pn}$。同样，SB比BV等于AB比BE，其中BE如前一样等于$\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{u}}{ny}$。显然，由这两种方法描绘出了同一条曲线。

而且，$BL=DE$，故$DL=BE$；又$LH=\frac{t}{2n\sqrt{u}}$及

$$DL=\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{u}}{ny},$$

因此，

$$DH=LH+DL=\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{u}}{ny}+\frac{t}{2n\sqrt{u}}。$$

又因$GD=\frac{y^2}{n}$，故

$$GH=DH-GD$$
$$=\frac{py}{2n}-\frac{\sqrt{u}}{ny}+\frac{t}{2n\sqrt{u}}-\frac{y^2}{n},$$

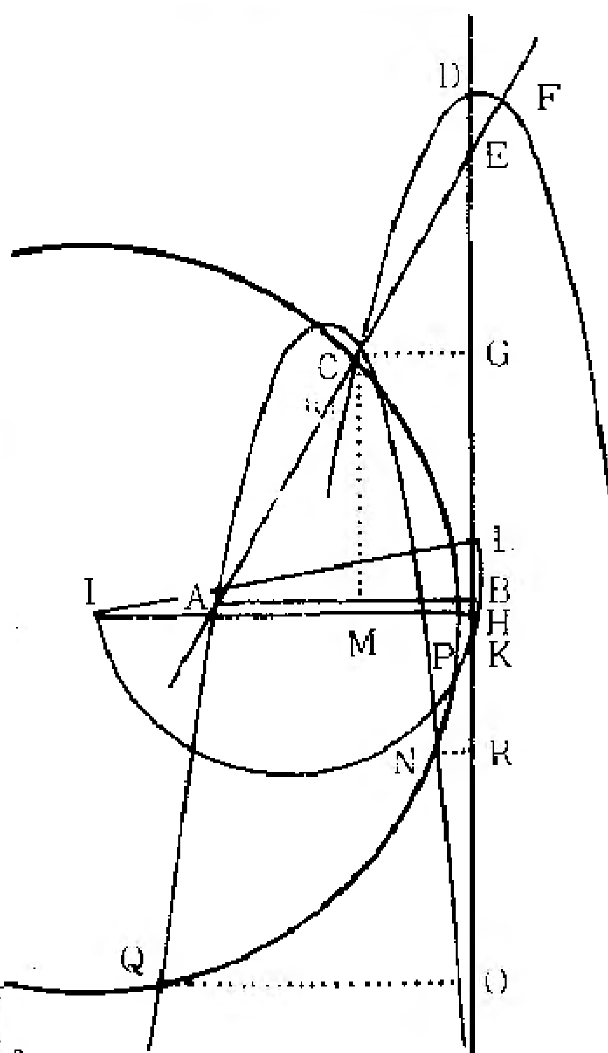
此式可写成

$$\mathrm{GH}=\frac{-y^3+\frac{1}{2}py^2+\frac{ty}{2\sqrt{u}}-\sqrt{u}}{ny},$$

由此可得 GH 的平方为

$$\frac{y^6-py^5+\left(\frac{1}{4}p^2-\frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4+\left(2\sqrt{u}+\frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3+\left(\frac{t^2}{4u}-p\sqrt{u}\right)y^2-ty+u}{n^2y^2}。$$

无论取曲线上的哪一点为 C，也不论它接近 N 或接近 Q，我们总是能够用上述同样的项和连接符号表示 BH 之截段(即点 H 与由 C 向 BH 所引垂线的垂足间的连线)的平方。



再者，$\mathrm{IH}=\frac{m}{n^2}$，$\mathrm{LH}=\frac{t}{2n\sqrt{u}}$，由此可得

$$\mathrm{IL}=\sqrt{\frac{m^2}{n^4}+\frac{t^2}{4n^2u}},$$

因为角 IHL 是直角；又因

$$\mathrm{LP}=\sqrt{\frac{s}{n^2}+\frac{p\sqrt{u}}{n^2}},$$

且角 IPL 是直角，故

$$=\mathrm{IP}=\sqrt{\frac{m^2}{n^4}+\frac{t^2}{4n^2u}-\frac{s}{n^2}-\frac{p\sqrt{u}}{n^2}}。$$

现引 CM 垂直于 IH，

$$\mathrm{IM}=\mathrm{HI}-\mathrm{HM}=\mathrm{HI}-\mathrm{CG}=\frac{m}{n^2}-y;$$

由此可得 IM 的平方为$\frac{m^2}{n^4}-\frac{2my}{n^2}+y^2$。

从 IC 的平方中减去 IM 的平方，所余的即为 CM 的平方：

$$\frac{t^2}{4n^2u}-\frac{s}{n^2}-\frac{p\sqrt{u}}{n^2}+\frac{2my}{n^2}-y^2,$$

此式等于上面求得的 GH 的平方。它可写成

$$\frac{-n^2y^4+2my^3-p\sqrt{u}\,y^2-sy^2+\frac{t^2}{4u}y^2}{n^2y^2}。$$

现在，式中的 n^2y^4用$\frac{t}{\sqrt{u}}y^4+qy^4-\frac{1}{4}p^2y^2$代替，$2my^3$用 $ry^3+2\sqrt{u}\,y^3+\frac{pt}{2\sqrt{u}}y^3$代替。在两个部分*皆以 n^2y^2乘之后，我们得到

$$y^6-py^5+\left(\frac{1}{4}p^2-\frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4+\left(2\sqrt{u}+\frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3+\left(\frac{t^2}{4u}-p\sqrt{u}\right)y^2-ty+u$$

等于

$$\left(\frac{1}{4}p^2-q-\frac{t}{\sqrt{u}}\right)y^4+\left(r+2\sqrt{u}+\frac{pt}{2\sqrt{u}}\right)y^3+\left(\frac{t^2}{4u}-s-p\sqrt{u}\right)y^2,$$

即

$$y^6-py^5+qy^4-ry^3+sy^2-ty+u=0,$$

由此可见，直线段 CG、NR、QO 等都是这个方程的根。

若我们想要找出直线段 a 和 b 之间的四比例中项，并令第一个比例中项为 x，则方程为 $x^5-a^4b=0$或 $x^6-a^4bx=0$。设 $y-a=x$，我们得

$$y^6-6ay^5+15a^2y-20a^3y^3+15a^4y^2-(6a^5+a^4b)y+a^6+a^5b=0。$$

因此，我们必须取 AB＝$3a$；抛物线的正焦弦 BK 必须为

* 指 GH 的平方和 CM 的平方。——译者

$$\sqrt{\frac{6a^3+a^2b}{\sqrt{a^2+ab}}+6a^2},$$

我称之为 n。DE 或 BL 将为

$$\frac{2a}{3n}\sqrt{a^2+ab}。$$

然后，描绘出曲线 ACN，我们必定有

$$LH=\frac{6a^3+a^2b}{2n\sqrt{a^2+ab}},$$

$$HI=\frac{10a^3}{n^2}+\frac{a^2}{n^2}\sqrt{a^2+ab}+\frac{18a^4-3a^3b}{2m^2\sqrt{a^2+ab}},$$

及

$$LP=\frac{a}{n}\sqrt{15a^2+6a\sqrt{a^2+ab}}。$$

因为以 I 为心的圆将通过如此找出的点 P，并跟曲线交于两点 C 与 N。若我们引垂线 NP 和 CG，从较长的 CG 中减去较短的 NR，所余的部分将是 x，即我们希望得到的四比例中项中的第一个。

这种方法也可用于将一个角分成五个相等的部分，在圆内嵌入正十一边形或正十三边形，以及无数其它的问题。不过，应该说明，在许多问题中，我们可能碰到圆与第二类抛物线斜交的情形而很难准确地定出交点。此时，这种作图法就失去了实际价值。克服这个困难并不难，只要搞出另一些与此类似的法则即可，而且有千百条不同的道路通向那些法则。

我的目标不是撰写一本大部头的书；我试图在少量的篇幅中蕴含丰富的内容。这一点你也许能从我的行文中加以推断：当我把同属一类的问题化归为单一的一种作图时，我同时就给出了把它们转化为其它无穷多种情形的方法，于是又给出了通过无穷多种途径解其中每个问题的方法；我利用直线与圆的相交完成了所有平面问题的作图，并利用抛物线和圆的相交完成了所有立体问题

的作图；最后，我利用比抛物线高一次的曲线和圆的相交，完成了所有复杂程度高一层的问题。对于复杂程度越来越高的问题，我们只要遵循同样的、具有普遍性的方法，就能完成其作图；就数学的进步而言，只要给出前二、三种情形的做法，其余的就很容易解决。

我希望后世会给予我仁厚的评判，不单是因为我对许多事情作出的解释，而且也因为我有意省略了的内容——那是留给他人享受发明之愉悦的。